



Titre: Méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements de
fluides viscoélastiques

Auteur: Alain Lioret
Author:

Date: 1998

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Lioret, A. (1998). Méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements de
fluides viscoélastiques [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/6910/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6910/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS
DE FLUIDES VISCOÉLASTIQUES

ALAIN LIORET

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

JUILLET 1998



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-38692-9

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS
DE FLUIDES VISCOÉLASTIQUES

présenté par: LIORET Alain

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph.D., président

M. FORTIN André, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PIERRE Roger, Ph.D., membre

À Sophie.

À mes parents et à mon frère.

Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à remercier sincèrement mon directeur de recherche, M. André Fortin, pour avoir su bien m'encadrer et me diriger tout au long de cette maîtrise. Je le remercie également pour le support financier qu'il m'a accordé sous forme de bourse.

Je remercie M. Jean-Yves Trépanier d'avoir accepté de présider mon jury de mémoire et pour l'aide qu'il m'a fournie pour la partie génération de maillage et la routine d'alignement du maillage. Je remercie aussi M. Roger Pierre d'avoir accepté d'être membre du jury. De plus, je tiens à souligner l'aide et les conseils que j'ai reçus de M. André Garon.

Je remercie mon amie Sophie pour m'avoir encouragé et supporté moralement tout au long de mes études de maîtrise. J'aimerais également remercier mes parents, qui m'ont encouragé durant toutes mes études post-secondaires.

Finalement, je remercie mes collègues du GREF pour leur esprit de camaraderie et leur esprit d'équipe.

Résumé

La résolution numérique de problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques est habituellement difficile et demande beaucoup de ressources informatiques. Les méthodes d'éléments finis adaptatives sont alors intéressantes pour ce type de problème, car elles permettent d'obtenir une solution précise à moindre coût. Bien que les méthodes adaptatives soient de plus en plus populaires pour les écoulements de fluides incompressibles, elles semblent encore très peu utilisées dans le cadre de problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques. Conséquemment, le but de ce mémoire est d'élaborer une méthode d'éléments finis adaptative appropriée pour ce type de problème.

Dans ce travail, nous traitons le problème par la méthode EVSS modifiée, qui est une formulation à quatre champs $(\vec{u}, p, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{d})$. La résolution numérique se fait par une approche découplée. On résout le problème de Stokes par l'algorithme d'Uzawa et on utilise la méthode de Lesaint-Raviart pour la résolution de la loi de comportement. Quant à la variable \boldsymbol{d} , il s'agit d'une projection du tenseur du taux de déformation dans le sous-espace discret des extra-contraintes. Nous traitons la non-linéarité du problème par la méthode GMRES.

La procédure adaptative développée dans ce mémoire est basée sur une stratégie de remaillage sur des maillages triangulaires non structurés. Étant donnée une précision fixée au départ, le processus adaptatif génère un maillage sur lequel l'erreur est équirépartie; le maillage est donc raffiné seulement où cela est nécessaire. L'estimation d'erreur tient compte uniquement du tenseur des extra-contraintes. Cet estimateur est obtenu par la résolution d'une équation aux dérivées partielles pour l'erreur, ressemblant ainsi à un estimateur de type problèmes locaux. Ce problème pour l'erreur est résolu élément par élément avec la méthode de Lesaint-Raviart. Quant au remaillage, il se fait en deux étapes: on génère d'abord le maillage suivant une distribution de tailles donnée, puis on utilise une technique d'alignement des arêtes du maillage dans le sens de l'écoulement.

Afin d'évaluer les performances de la stratégie adaptative proposée, nous traitons trois problèmes tests. Nous mettons aussi en évidence le phénomène d'oscillations causées par la méthode de Lesaint-Raviart sur des maillages non structurés. Par les résultats obtenus pour les problèmes tests considérés, on remarque que notre méthode adaptative semble être assez efficace.

Abstract

The numerical resolution of viscoelastic fluid flow problems is difficult and requires important computer resources. For this reason, adaptive finite element methods are promising, because they give accurate solutions at reasonable cost. Adaptive finite element methods are already used for incompressible Newtonian fluid flow problems, but not very often for viscoelastic fluid flow problems. Consequently, the aim of this work is to develop an adaptive finite element method for viscoelastic fluid flow problems.

In this work, the modified EVSS method is used, where a formulation with four variables $(\vec{u}, p, \tau, \mathbf{d})$ is considered. For the numerical resolution, a decoupled approach is used. The Stokes problem is solved by the Uzawa's algorithm and the Lesaint-Raviart method is used for the resolution of the constitutive equation. The variable \mathbf{d} is a local projection of the rate of deformation tensor into the extra-stress discrete subspace. The GMRES method is employed to treat the non-linearity of the problem.

Our adaptive process is based on an adaptive remeshing strategy with triangular unstructured meshes. For a given fixed accuracy, the adaptive strategy provides a

mesh where the principle of error equidistribution is imposed. The mesh is then refined only where necessary. The error estimate takes into consideration only the contribution of the extra-stress tensor and is obtained by solving a partial differential equation. This equation for the error is solved on an element by element basis using the Lesaint-Raviart method. The remeshing part of the process is done in two steps. Given a map of element size, a new mesh is generated. Then a technique is used to align at least one side of each triangle in the direction of the flow to reduce oscillation.

Three tests problems are presented to evaluate the performance of our adaptive method. The oscillations due to the Lesaint-Raviart method on unstructured meshes is also shown. The numerical results obtained show that our adaptive procedure is quite effective.

Table des matières

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiii
TABLE DES FIGURES	xiv
LISTE DES SYMBOLES	xviii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1: MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS DE FLUIDES	
VISCOÉLASTIQUES	5
1.1 Les équations du modèle physique	5
1.2 Formulation mixte	7
1.3 Discrétisation des équations	10

1.4	Résolution numérique du problème	12
1.4.1	Problème de Stokes	13
1.4.2	Loi de comportement	14
1.4.3	Projection du taux de déformation	17
1.4.4	Résolution globale	18
CHAPITRE 2: STRATÉGIES ADAPTATIVES		23
2.1	Types de méthodes adaptatives	24
2.2	Méthodologie générale	26
2.3	Estimation d'erreur <i>a posteriori</i>	28
2.3.1	Problème type	29
2.3.2	Norme de l'erreur	30
2.3.3	Méthode de projection	32
2.3.4	Méthode des résidus élémentaires	33
2.3.5	Méthode de résolution de problèmes locaux	35
2.3.6	Indice d'efficacité	38
2.4	Opérateur de transition	39
2.5	Remaillage	44
CHAPITRE 3: MÉTHODE ADAPTATIVE POUR LES FLUIDES		
VISCOÉLASTIQUES		46
3.1	Estimateur d'erreur	47

3.2	Stratégie adaptative	50
3.3	Remaillage	51
CHAPITRE 4: RÉSULTATS NUMÉRIQUES		53
4.1	Problème de couche limite	53
4.1.1	Effet du maillage	56
4.1.2	Cas $n = 10$	60
4.1.3	Cas $n = 20$	65
4.2	Problème de la contraction 4:1	71
4.2.1	Cas newtonien	72
4.2.2	Cas viscoélastique	83
4.3	Écoulement périodique autour d'un cylindre	93
CONCLUSION		100
RÉFÉRENCES		103

Liste des tableaux

4.1	<i>Problème de couche limite ($n = 10$): résultats de l'estimation d'erreur à chaque cycle adaptatif.</i>	60
4.2	<i>Problème de couche limite ($n = 20$): résultats de l'estimation d'erreur à chaque cycle adaptatif.</i>	70
4.3	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): erreur relative estimée.</i>	74
4.4	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): erreur relative estimée.</i>	84
4.5	<i>Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: erreur rela- tive estimée.</i>	95

Table des figures

1.1	<i>Éléments P_2^+ et P_1 discontinu.</i>	10
1.2	<i>Méthode de Lesaint-Raviart: illustration du saut à l'interface de deux éléments.</i>	15
4.1	<i>Domaine de calcul pour le problème de couche limite.</i>	54
4.2	<i>Effet de la méthode de Lesaint-Raviart sur un maillage non-structuré: a) maillage et courbes de niveau de b) τ_{11} et c) τ_{12}.</i>	58
4.3	<i>Effet de la méthode de Lesaint-Raviart sur un maillage orienté dans le sens de l'écoulement: a) maillage et courbes de niveau de b) τ_{11} et c) τ_{12}.</i>	59
4.4	<i>Problème de couche limite ($n = 10$): maillages de chaque cycle adaptatif.</i>	61
4.5	<i>Problème de couche limite ($n = 10$): coupe en sortie de la variable u_1 sur le premier (\cdots) et le dernier maillage ($---$) et la solution exacte (trait plein).</i>	62
4.6	<i>Problème de couche limite ($n = 10$): coupes en sortie des variables a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le premier (\cdots) et le dernier maillage ($---$) et la solution exacte (trait plein).</i>	63
4.7	<i>Problème de couche limite ($n = 10$): courbes de niveau de τ_{11} sur a) le premier et b) le dernier maillage.</i>	64

4.8	<i>Problème de couche limite ($n = 20$): maillages #1, #2, #3, #4 et #10.</i>	66
4.9	<i>Problème de couche limite ($n = 20$): coupe en sortie de la variable u_1 sur le premier (...) et le dernier maillage (---) et la solution exacte (trait plein).</i>	67
4.10	<i>Problème de couche limite ($n = 20$): coupes en sortie des variables a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le premier (...) et le dernier maillage (---) et la solution exacte (trait plein).</i>	68
4.11	<i>Problème de couche limite ($n = 20$): courbes de niveau de τ_{11} sur a) le premier et b) le dernier maillage.</i>	69
4.12	<i>Domaine de calcul pour le problème de la contraction 4:1.</i>	72
4.13	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): a) premier et b) c) dernier maillage.</i>	75
4.14	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): courbes de niveau de a) u_1 et b) u_2 sur le dernier maillage.</i>	76
4.15	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): courbes de niveau de a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le dernier maillage.</i>	77
4.16	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupe de u_1 en $y = 0$ sur le dernier maillage.</i>	78
4.17	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{22} en $y = 0$ sur le dernier maillage.</i>	79

4.18	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupes de a) u_1 et b) u_2 en $y = 1$ sur le dernier maillage.</i>	80
4.19	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{12} en $y = 1$ sur le dernier maillage.</i>	81
4.20	<i>Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupe de τ_{22} en $y = 1$ sur le dernier maillage.</i>	82
4.21	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): a) premier et b) c) dernier maillage.</i>	85
4.22	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): courbes de niveau de a) u_1 et b) u_2 sur le dernier maillage.</i>	86
4.23	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): courbes de niveau de a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le dernier maillage.</i>	87
4.24	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupe de u_1, τ_{11} et τ_{22} en $y = 0$ sur le dernier maillage.</i>	88
4.25	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{22} en $y = 0$ sur le dernier maillage.</i>	89
4.26	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupes de a) u_1 et b) u_2 en $y = 1$ sur le dernier maillage.</i>	90
4.27	<i>Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{12} en $y = 1$ sur le dernier maillage.</i>	91

4.28	<i>Problème de la contraction 4 : 1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupe de τ_{22} en $y = 1$ sur le dernier maillage.</i>	92
4.29	<i>Géométrie du problème d'écoulement périodique autour d'une rangée de cylindres.</i>	93
4.30	<i>Domaine de calcul pour le problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre.</i>	94
4.31	<i>Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: a) premier et b) dernier maillage.</i>	97
4.32	<i>Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: courbes de niveau de a) u_1 et b) u_2 sur le dernier maillage.</i>	98
4.33	<i>Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: courbes de niveau de a) τ_{11}, b) τ_{12} et c) τ_{22} sur le dernier maillage.</i>	99

Liste des symboles

Dans ce mémoire, nous adoptons les conventions suivantes: une lettre surmontée d'une flèche représente un vecteur (ex: \vec{v}) et une lettre en caractère gras représente un tenseur. De plus, l'indice h pour v_h et \mathcal{V}_h désigne respectivement la variable discrète et l'espace discret associés à v et \mathcal{V} .

Liste des variables:

\vec{u} : champs de vitesse;

p : pression hydrostatique;

τ : tenseur des extra-contraintes;

\mathbf{d} : tenseur de projection du tenseur du taux de déformation;

\vec{v} : fonction test associée au champs de vitesse;

q : fonction test associée à la pression;

ϕ : fonction test associée au tenseur des extra-contraintes;

ψ : fonction test associée au tenseur \mathbf{d} ;

e : erreur exacte;

e_h : estimateur d'erreur;

\vec{n} : normale extérieure;

η_v : viscosité élastique;

λ : temps de relaxation;

We : nombre de Weissenberg;

E_0 : erreur globale cible;

$E_{0,K}$: erreur élémentaire cible;

ξ : erreur relative cible;

ζ : facteur de réduction d'erreur.

Liste des espaces:

Ω : domaine de calcul;

\mathcal{T}_h : triangulation de Ω ;

$L^2(\Omega)$: espace des fonctions de carré intégrable;

$[L^2(\Omega)]_s^{2 \times 2}$: espace des tenseurs symétriques dont les composantes sont dans $L^2(\Omega)$;

$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$: espaces de Sobolev;

\mathcal{V} : espace du champs de vitesse;

\mathcal{Q} : espace de la pression;

Σ : espace du tenseur des extra-contraintes et du tenseur \mathbf{d} ;

K : élément de la triangulation \mathcal{T}_h .

Liste des notations:

$\sigma : \tau$: double contraction de σ avec τ ;

$tr(\tau)$: trace de τ ;

$\nabla \cdot \vec{v}$: divergence de \vec{v} ;

$\dot{\gamma}(\vec{v})$: tenseur du taux de déformation de \vec{v} ;

$\nabla \vec{v}$: gradient de \vec{v} ;

$\frac{\delta \sigma}{\delta t}$: dérivée convective de σ ;

$\frac{\partial u}{\partial n}$: $\nabla u \cdot \vec{n}$;

∂K : frontière de l'élément K ;

∂K^- : $\{\vec{x} \in \partial K \mid \vec{u} \cdot \vec{n} < 0\}$;

∂K^+ : $\{\vec{x} \in \partial K \mid \vec{u} \cdot \vec{n} > 0\}$;

$\|\cdot\|_\Omega$: norme sur le domaine Ω ;

$\|\cdot\|_K$: norme sur l'élément K ;

$\|\cdot\|_{\partial K}$: norme sur la frontière de l'élément K ;

h_K : taille de l'élément K .

Introduction

L'étude du comportement des fluides viscoélastiques est un domaine de recherche très actif, étant donné le grand nombre d'applications des polymères dans l'industrie. Un des outils utilisés pour analyser les écoulements de fluides viscoélastiques est la simulation numérique.

Cependant, la résolution numérique de problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques est assez délicate. En fait, plus le nombre de Weissenberg est élevé, plus le problème devient difficile à résoudre numériquement. Ces dernières années, plusieurs formulations pour ce problème ont été mises au point. Parmi elles, la formulation EVSS modifiée, proposée par Guénette-Fortin [12], s'est avérée efficace. Celle-ci est basée sur l'introduction d'un quatrième champ, ce qui implique que les inconnues du problème sont alors $(\tilde{u}, p, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{d})$. De plus, le système d'équations à résoudre est non linéaire. La résolution d'un tel problème requiert donc énormément de ressources informatiques.

De plus, on observe généralement lors des simulations numériques la présence, dans certaines régions du domaine, de fortes variations des extra-contraintes. Ceci nécessite donc un maillage bien adapté au problème traité afin d'obtenir une solu-

tion satisfaisante par la méthode des éléments finis. En pratique, l'utilisation d'un maillage trop grossier nous donne habituellement une solution imprécise, alors que la résolution sur un maillage uniforme très fin demande de trop grandes ressources rendant le problème quasiment impossible à résoudre.

Ainsi, l'utilisation de méthodes adaptatives s'impose. Celles-ci permettent d'obtenir une solution ayant la précision désirée tout en minimisant les coûts de calculs. Les méthodes d'éléments finis adaptatives sont de plus en plus employées pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Par contre, on retrouve très peu de travaux sur les stratégies adaptatives pour les problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques. En effet, nous n'avons trouvé que trois d'articles traitant de ce sujet [23, 34, 33].

Dans ce mémoire, nous proposons une méthode d'éléments finis adaptative de type h spécialement développée pour les problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques. Cette méthode est basée sur une stratégie de remaillage adaptatif sur des maillages triangulaires non structurés. Cette stratégie adaptative consiste donc à calculer d'abord une solution par éléments finis sur un maillage initial quelconque. On calcule ensuite une estimation d'erreur qui nous permettra, par la suite, d'évaluer les tailles élémentaires que devraient avoir le prochain maillage afin d'atteindre une précision fixée au départ. Une fois que la nouvelle distribution de tailles est

calculée, nous sommes en mesure de générer un nouveau maillage respectant cette distribution de tailles et ensuite de calculer une solution sur ce maillage. Ce processus est répété jusqu'à ce que la précision voulue soit atteinte.

L'estimateur d'erreur que nous utilisons ne tient compte que de l'erreur commise sur le tenseur des extra-contraintes puisque cette variable joue un rôle majeur dans les simulations d'écoulements de fluides viscoélastiques. Nous obtenons cette estimation d'erreur par la résolution d'une équation aux dérivées partielles pour la fonction d'erreur, ressemblant à une estimation de type résolution de problèmes locaux. Ce type d'estimateur d'erreur a d'abord été introduit par Strouboulis-Oden [25], puis a été utilisé par Zaki [35] dans le cadre de problèmes de convection. Le problème pour l'erreur est résolu par la méthode de Lesaint-Raviart [17].

Le premier chapitre est consacré à la modélisation, par la méthode des éléments finis, des écoulements de fluides viscoélastiques. Nous y présentons les équations reliées au modèle physique du problème, la formulation mixte utilisée, ainsi que la démarche pour la résolution numérique. Au deuxième chapitre, nous faisons une revue des stratégies adaptatives le plus souvent rencontrées dans la littérature. C'est dans ce chapitre que nous introduirons la terminologie relative aux méthodes d'éléments finis adaptatives. Au troisième chapitre, nous exposons notre stratégie adaptative pour les problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques. Finalement, au qua-

trième chapitre, nous présentons et analysons les résultats numériques obtenus pour trois problèmes tests: un problème de couche limite, le problème de la contraction 4 : 1 et le problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre. De plus, nous montrons l'effet de la méthode de Lesaint-Raviart sur des maillages non structurés.

Chapitre 1

Modélisation des écoulements de fluides viscoélastiques

Dans ce chapitre, nous présentons en premier lieu les équations qui modélisent les écoulements de fluides viscoélastiques. Nous introduisons ensuite la formulation mixte utilisée, puis nous traitons de la discrétisation par la méthode des éléments finis. En particulier, nous présentons la méthode de résolution utilisée dans ce travail.

1.1 Les équations du modèle physique

Le système qui gouverne les écoulements de fluides viscoélastiques est constitué de trois équations: les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse qui forment le système de Stokes, puis l'équation de la loi de comportement du fluide viscoélastique, qui décrit la relation entre le tenseur des extra-contraintes $\boldsymbol{\tau}$ et le champ de vitesse \vec{u} , ou plus particulièrement le taux de déformation $\dot{\gamma}(\vec{u}) = \frac{\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t}{2}$.

Le système de Stokes est le suivant:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla p = \vec{f} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.2)$$

- où
- \vec{u} est le champ de vitesse;
 - p est la pression hydrostatique;
 - $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des extra-contraintes;
 - \vec{f} est un terme de force.

Dans ce travail, nous traitons uniquement le cas stationnaire, c'est-à-dire que les équations (1.1) et (1.2) ne dépendent pas du temps. Nous ne tenons pas compte du terme de convection présent dans les équations de Navier-Stokes puisque les fluides viscoélastiques sont très visqueux et les procédés de mise en forme sont généralement à faible vitesse d'écoulement, donc à faible nombre de Reynolds. De plus, les fluides considérés sont incompressibles, donc à divergence nulle tel que décrit par l'équation (1.2).

Pour la loi de comportement du fluide, nous utilisons le modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT) [20] dont l'équation est donnée comme suit:

$$\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} = 2\eta_v \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\vec{u}) \quad (1.3)$$

où:

$$\frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} = (\vec{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - \nabla \vec{u} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \vec{u})^t$$

est la dérivée contravariante. De plus, λ , η_v et ε sont respectivement le temps de relaxation du fluide, sa viscosité et un paramètre adimensionnel du modèle qui dépend du fluide.

1.2 Formulation mixte

Les équations (1.1), (1.2) et (1.3) présentées à la section précédente forment donc un système que l'on cherchera éventuellement à résoudre sur un domaine ouvert et borné $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, ayant comme frontière l'ensemble Γ . Ainsi, le problème à considérer est le suivant:

♦ trouver $(\vec{u}, p, \boldsymbol{\tau})$ tel que:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla p &= \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \left(1 + \frac{\lambda \varepsilon}{\eta_v} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} &= 2\eta_v \dot{\gamma}(\vec{u}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ce système est non linéaire et comprend six inconnues: deux en vitesse, une pour la pression et trois pour le tenseur symétrique $\boldsymbol{\tau}$. En pratique, la résolution de ce pro-

blème implique une matrice globale de très grande taille, ce qui demande beaucoup de ressources informatiques.

Pour des raisons de stabilité, nous utilisons la formulation mixte EVSS modifiée proposée par Guénette et Fortin [12], aussi appelée DEVSS (Discrete Elastic Viscous Stress Splitting) [4]. Cette formulation consiste à introduire comme nouvelle variable du système le tenseur $\mathbf{d} = \dot{\gamma}(\vec{u})$, puis d'ajouter dans l'équation de mouvement (1.1) le terme diffusif $-2\alpha \nabla \cdot \dot{\gamma}(\vec{u})$ (où α est un paramètre positif) de chaque côté de l'égalité et de substituer $\dot{\gamma}(\vec{u})$ dans le membre de droite de l'équation (1.1) par la variable \mathbf{d} . Le terme $-2\alpha \nabla \cdot \dot{\gamma}(\vec{u})$ introduit dans l'équation de mouvement a pour effet de renforcer le caractère elliptique du système de Stokes et, par conséquent, de faciliter la vérification de la condition de Babūška-Brezzi dans le cas où $\lambda = 0$ (cas newtonien). Ainsi, la formulation DEVSS est la suivante:

$$\begin{aligned}
 -2\alpha \nabla \cdot \dot{\gamma}(\vec{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - 2\alpha \nabla \cdot \mathbf{d} + \vec{f} \\
 \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\
 \left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} &= 2\eta_v \dot{\gamma}(\vec{u}) \\
 \mathbf{d} &= \dot{\gamma}(\vec{u})
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Il est clair que pour le problème continu, l'ajout des termes $-2\alpha \nabla \cdot \mathbf{d}$ et $-2\alpha \nabla \cdot \dot{\gamma}(\vec{u})$ dans l'équation de mouvement est sans effet sur la solution. Cependant, ce n'est pas

le cas pour le problème discret. Dans la discrétisation du problème, la variable \mathbf{d} à un effet stabilisateur pour le problème de Stokes, pourvu que l'espace discret de cette variable soit bien choisi. Bien que le paramètre α puisse prendre une valeur quelconque, des expériences numériques montre que $\alpha = \eta_v$ semble être un choix optimal [6, 12].

Afin d'obtenir la formulation variationnelle correspondante au système (1.5), on multiplie chaque équation par la fonction test qui lui est associée et on intègre sur le domaine Ω . Après avoir appliqué le théorème de la divergence au système de Stokes, on a le problème variationnel suivant:

♦ trouver $(\vec{u}, p, \tau, \mathbf{d}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \times \Sigma \times \Sigma$ tel que:

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}) : \dot{\gamma}(\vec{v}) \, d\vec{x} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v} \, d\vec{x} \\
 & \quad = - \int_{\Omega} (\tau - 2\alpha \mathbf{d}) : \dot{\gamma}(\vec{v}) \, d\vec{x} + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\vec{x} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \\
 & \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u} \, d\vec{x} = 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q} \\
 & \int_{\Omega} \left[\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau) \right) \tau + \lambda \frac{\delta \tau}{\delta t} \right] : \phi \, d\vec{x} \\
 & \quad = 2\eta_v \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}) : \phi \, d\vec{x} \quad \forall \phi \in \Sigma \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{d} : \psi \, d\vec{x} = \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}) : \psi \, d\vec{x} \quad \forall \psi \in \Sigma
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

où $\mathcal{V} = [H_0^1(\Omega)]^2$, $\mathcal{Q} = L^2(\Omega)$ et $\Sigma = [L^2(\Omega)]_s^{2 \times 2}$.

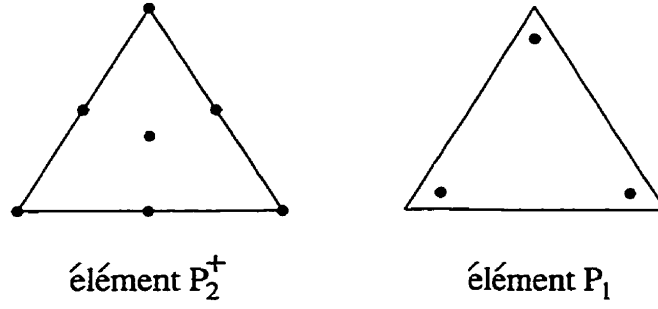


Figure 1.1 Éléments P_2^+ et P_1 discontinu.

1.3 Discrétisation des équations

Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω . Pour résoudre le problème variationnel (1.6) par la méthode des éléments finis, on choisit les sous-espaces discrets suivants:

$$\mathcal{V}_h = \{ \vec{v}_h \in [H^1(\Omega)]^2 \mid \vec{v}_h \in C^0(\Omega) \text{ et } \vec{v}_{h|_K} \in [P_2^+(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (1.7)$$

$$\mathcal{Q}_h = \{ q_h \in L^2(\Omega) \mid q_{h|_K} \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (1.8)$$

$$\Sigma_h = \{ \psi_h \in [L^2(\Omega)]_s^{2 \times 2} \mid \psi_{h|_K} \in [P_1(K)]_s^{2 \times 2}, \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (1.9)$$

où $P_2^+(K)$ est l'ensemble des polynômes quadratiques définis sur l'élément K , enrichi d'une fonction «bulle» cubique associée au noeud situé au barycentre de l'élément, et $P_1(K)$ est l'ensemble des polynômes linéaires (discontinus) définis sur l'élément K . Notons que nous avons choisi de prendre des espaces identiques pour la discrétisation de $\boldsymbol{\tau}$ et \boldsymbol{d} , bien qu'il soit possible de prendre un autre espace discret pour la variable \boldsymbol{d} . Par exemple, Baaijens [4] utilise une approximation discontinue pour $\boldsymbol{\tau}$ et une approximation continue pour \boldsymbol{d} . Les espaces définis par les expres-

sions (1.7), (1.8) et (1.9) sont choisis de façon à respecter la condition de Babūška-Brezzi pour le problème de Stokes en formulation à deux champs \vec{u} et p [21]. La condition supplémentaire $\nabla \mathcal{V}_h \subset \Sigma_h$ n'est cependant pas respectée ici [18], mais ceci est compensé par l'effet stabilisateur du terme $-2\alpha \nabla \cdot \dot{\gamma}(\vec{u}_h)$ dans l'équation de mouvement. Notons qu'aucune condition de continuité n'est imposée à l'interface des éléments pour les variables $q_h \in \mathcal{Q}_h$ et $\psi_h \in \Sigma_h$.

Ainsi, en remplaçant les espaces \mathcal{V} , \mathcal{Q} et Σ par leurs sous-espaces respectifs \mathcal{V}_h , \mathcal{Q}_h et Σ_h dans le problème variationnel continu (1.6), on obtient par la méthode de Galerkin classique le problème variationnel discret suivant:

◆ trouver $(\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \mathbf{d}_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \Sigma_h \times \Sigma_h$ tels que:

$$\begin{aligned}
& 2\alpha \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \dot{\gamma}(\vec{v}_h) \, d\vec{x} - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h \, d\vec{x} \\
& = - \int_{\Omega} (\tau_h - 2\alpha \mathbf{d}_h) : \dot{\gamma}(\vec{v}_h) \, d\vec{x} + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}_h \, d\vec{x} \quad \forall \vec{v}_h \in \mathcal{V}_h \\
& \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{u}_h \, d\vec{x} = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \\
& \int_{\Omega} \left[\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h) \right) \tau_h + \lambda \frac{\delta \tau_h}{\delta t} \right] : \phi_h \, d\vec{x} \\
& = 2\eta_v \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \phi_h \, d\vec{x} \quad \forall \phi_h \in \Sigma_h \\
& \int_{\Omega} \mathbf{d}_h : \psi_h \, d\vec{x} = \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \psi_h \, d\vec{x} \quad \forall \psi_h \in \Sigma_h
\end{aligned} \tag{1.10}$$

On peut remarquer que la variable \mathbf{d}_h est tout simplement une projection de $\dot{\gamma}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$ dans le sous-espace discret Σ_h et, tel que mentionné à la section précédente, l'égalité entre $\dot{\gamma}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$ et \mathbf{d}_h n'est plus respectée dans le problème discret, à moins que $\nabla \mathcal{V}_h \subset \Sigma_h$.

1.4 Résolution numérique du problème

Puisque le système global (1.10) est de très grande taille, sa résolution par une approche couplée nécessite énormément d'espace mémoire. C'est pourquoi nous optons pour une résolution de manière découplée en trois parties. On résout donc distinctement les sous-systèmes suivants:

- le problème de Stokes pour $\boldsymbol{\tau}_h$ et \mathbf{d}_h fixés;
- la loi de comportement pour $\tilde{\mathbf{u}}_h$ fixé;
- la projection $\mathbf{d}_h = \dot{\gamma}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$ pour $\tilde{\mathbf{u}}_h$ fixé.

Le couplage de ces sous-systèmes, de même que le traitement de la non-linéarité, se fera ensuite par l'application de la méthode GMRES [6, 8, 12], qui est un algorithme de Newton-Krylov. Dans les sous-sections qui suivent, nous faisons un survol des méthodes de résolution des différents sous-systèmes découplés et nous finissons par la présentation de la résolution du système global par la méthode GMRES.

1.4.1 Problème de Stokes

Étant donnés τ_h et \mathbf{d}_h , le problème de Stokes discrétisé à résoudre est le suivant:

♦ trouver $(\vec{u}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$

$$\begin{aligned} 2\alpha \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \dot{\gamma}(\vec{v}_h) \, d\vec{x} - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h \, d\vec{x} \\ = - \int_{\Omega} (\tau_h - 2\alpha \mathbf{d}_h) : \dot{\gamma}(\vec{v}_h) \, d\vec{x} + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}_h \, d\vec{x} \quad \forall \vec{v}_h \in \mathcal{V}_h \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{u}_h \, d\vec{x} = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h$$

Ce problème discret peut être représenté par le système matriciel suivant:

$$A\vec{u}_h + B^t p_h = \vec{C}(\tau_h, \mathbf{d}_h)$$

$$B\vec{u}_h = 0$$

Pour résoudre ce système, nous utilisons l'algorithme d'Uzawa [10], permettant ainsi de réduire la taille de la matrice globale. De plus, quatre degrés de liberté par élément, deux en vitesse et deux en pression, sont éliminées grâce à la technique de condensation proposée par Fortin et Fortin [11]. La résolution du système se fait finalement de façon directe avec une factorisation LU .

1.4.2 Loi de comportement

Étant donnée la nature hyperbolique de la loi de comportement, on ne peut résoudre celle-ci par une méthode de Galerkin classique, car elle s'avère instable pour des problèmes où la solution exacte est irrégulière sur une partie du domaine Ω . Il faut donc faire appel à une technique de type «upwinding» pour résoudre cette équation. La méthode de Lesaint-Raviart [17] est utilisée à cette fin. Dans cette section, nous décrivons brièvement cette méthode dans le cadre de la résolution de la loi de comportement d'un fluide viscoélastique.

Rappelons que la formulation discrète de la loi de comportement par une approche Galerkin classique est la suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h) \right) \tau_h + \lambda \frac{\delta \tau_h}{\delta t} \right] : \phi_h \, d\vec{x} \\ = 2\eta_v \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \phi_h \, d\vec{x} \quad \forall \phi_h \in \Sigma_h \end{aligned} \quad (1.11)$$

En décomposant cette formulation en sous-systèmes élémentaires, on obtient alors la formulation variationnelle suivante sur chaque élément K :

$$\begin{aligned} \int_K \left[\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h) \right) \tau_h + \lambda (\vec{u}_h \cdot \nabla \tau_h - \nabla \vec{u}_h \cdot \tau_h - \tau_h \cdot (\nabla \vec{u}_h)^t) \right] : \phi_h \, d\vec{x} \\ = 2\eta_v \int_K \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \phi_h \, d\vec{x} \quad \forall \phi_h \in [P_1(K)]_s^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

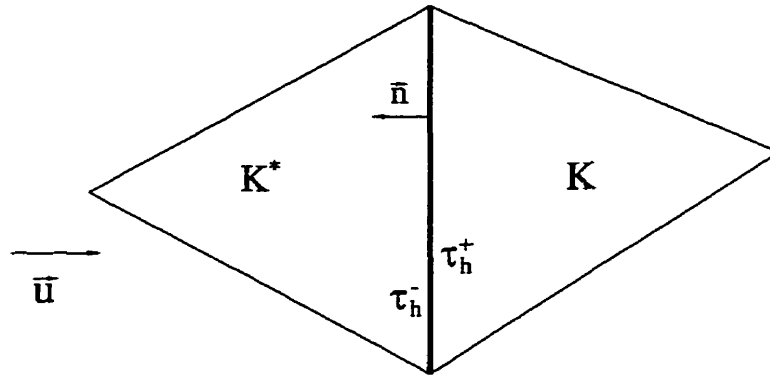


Figure 1.2 Méthode de Lesaint-Raviart: illustration du saut à l'interface de deux éléments.

Rappelons que, par le choix de l'espace Σ_h , aucune condition de continuité n'est imposée sur la variable τ_h à l'interface des éléments. Les dérivées de τ_h sont donc prises au sens des distributions et font apparaître un terme de saut à l'interface des éléments, tel qu'illustré à la figure 1.2. Ainsi, le terme convectif dans l'expression (1.12) doit être remplacé par:

$$\int_K \vec{u}_h \cdot \nabla \tau_h : \phi_h \, d\vec{x} \longrightarrow \int_K \vec{u}_h \cdot \nabla \tau_h : \phi_h \, d\vec{x} + \int_{\partial K^-} (\vec{u}_h \cdot \vec{n}) [\tau_h] : \phi_h \, ds \quad (1.13)$$

où \vec{n} est la normale extérieure à K , $\partial K^- = \{\vec{x} \in \partial K \mid \vec{u} \cdot \vec{n} < 0\}$ est la frontière entrante de l'élément K et $[\tau_h]$ est le saut de la variable τ_h défini par:

$$[\tau_h](\vec{x}) \equiv \tau_h^-(\vec{x}) - \tau_h^+(\vec{x}) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \tau_h(\vec{x} + \epsilon \vec{u}) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tau_h(\vec{x} + \epsilon \vec{u})$$

Lorsqu'on remplace l'expression (1.13) dans la formulation variationnelle (1.12),

nous obtenons une nouvelle formulation:

$$\begin{aligned} & \int_K \left[\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h) \right) \tau_h + \lambda (\tilde{u}_h \cdot \nabla \tau_h - \nabla \tilde{u}_h \cdot \tau_h - \tau_h \cdot (\nabla \tilde{u}_h)^t) \right] : \phi_h \, d\tilde{x} \\ & + \lambda \int_{\partial K^-} (\tilde{u}_h \cdot \tilde{n}) [\tau_h] : \phi_h \, ds = 2\eta_v \int_K \dot{\gamma}(\tilde{u}_h) : \phi_h \, d\tilde{x} \quad \forall \phi_h \in [P_1(K)]_s^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

En considérant τ_h^+ comme étant égal à τ_h sur les côtés entrants de l'élément K , on peut réécrire l'expression précédente comme suit:

$$\begin{aligned} & \int_K \left[\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h) \right) \tau_h + \lambda (\tilde{u}_h \cdot \nabla \tau_h - \nabla \tilde{u}_h \cdot \tau_h - \tau_h \cdot (\nabla \tilde{u}_h)^t) \right] : \phi_h \, d\tilde{x} \\ & \quad - \lambda \int_{\partial K^-} (\tilde{u}_h \cdot \tilde{n}) \tau_h : \phi_h \, ds \\ & = 2\eta_v \int_K \dot{\gamma}(\tilde{u}_h) : \phi_h \, d\tilde{x} - \lambda \int_{\partial K^-} (\tilde{u}_h \cdot \tilde{n}) \tau_h^- : \phi_h \, ds \quad \forall \phi_h \in [P_1(K)]_s^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ceci est la formulation discrète sous la forme proposée par Lesaint-Raviart [17]. Ce dernier système peut être représenté sous la forme matricielle suivante:

$$M_K(u_K, \tau_K) \tau_K = G_K(\tilde{u}_K) + H_K \tau_K^- \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (1.16)$$

Notons que le système (1.16) est non linéaire par rapport à τ_h (si $\epsilon \neq 0$). On doit donc linéariser ce système par la méthode de Newton. Sur un élément, on considère seulement le saut $[\tau_h]$ sur les côtés entrants. Ainsi, pour un élément K donné, si l'on connaît la valeur de τ_h sur les éléments en amont, on peut résoudre le système (1.15) par rapport à τ_h . Cette démarche nous permet de faire une résolution élément par

élément, ce qui réduit de beaucoup l'espace mémoire nécessaire en évitant le stockage d'une matrice globale. Pour un problème où il n'y a pas de zone de recirculation, on peut montrer qu'il existe une numérotation optimale des éléments, c'est-à-dire une numérotation pour laquelle, lors de la résolution sur un élément quelconque du maillage, la solution sur les éléments adjacents à la frontière entrante a déjà été calculée. Pour les problèmes comprenant des zones de recirculation, en utilisant une bonne renumérotation, on balaye de façon itérative le domaine de calcul jusqu'à convergence. Ceci revient à appliquer une méthode de type Gauss-Seidel par blocs. Afin d'éviter de faire plusieurs balayage du domaine, on peut aussi évaluer le terme de bord τ_h^- en utilisant la solution τ_h obtenue à l'itération de Newton précédente [3].

1.4.3 Projection du taux de déformation

On peut calculer la projection du tenseur $\dot{\gamma}(\vec{u}_h)$ dans l'espace discret Σ_h en considérant le problème suivant:

♦ trouver $\mathbf{d}_h \in \Sigma_h$ tel que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}_h : \boldsymbol{\psi}_h \, d\vec{x} = \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \boldsymbol{\psi}_h \, d\vec{x} \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Sigma_h$$

Cette projection de $\dot{\gamma}(\vec{u}_h)$ se fait en réalité de façon élémentaire puisqu'aucune continuité n'est requise à l'interface des éléments pour les variables \mathbf{d}_h et $\boldsymbol{\psi}_h$. On

considère donc les systèmes élémentaires suivants:

$$\int_K \mathbf{d}_h : \psi_h \, d\vec{x} = \int_K \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \psi_h \, d\vec{x} \quad \forall \psi_h \in [P_1(K)]_s^{2 \times 2}, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (1.17)$$

Ce système peut se réécrire sous la forme matricielle suivante:

$$D_K \mathbf{d}_K = F(\vec{u}_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (1.18)$$

Étant donné la petite taille de ces systèmes élémentaires, on résout ceux-ci par une méthode directe avec une factorisation LU .

1.4.4 Résolution globale

Dans les sous-sections précédentes, nous avons explicité la forme des sous-systèmes qui composent le problème (1.10). Nous sommes donc en mesure d'écrire le système global à résoudre sous la forme suivante:

$$A\vec{u}_h + B^t p_h = \vec{C}(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{d}_h)$$

$$B\vec{u}_h = 0$$

$$M_K(\vec{u}_K, \boldsymbol{\tau}_K) \boldsymbol{\tau}_K = G_K(\vec{u}_K) + H_K \boldsymbol{\tau}_K^- \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

$$D_K \mathbf{d}_K = F_K(\vec{u}_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Ce système étant non linéaire, on doit donc utiliser une méthode itérative appropriée pour le résoudre. Une méthode de point fixe s'avère être inefficace pour la

résolution de ce système, pour des raisons de perte de convergence. La méthode de Newton est une méthode plus convenable pour résoudre ce problème. De façon générale, la méthode de Newton est conçue pour résoudre des problèmes non linéaires sous la forme:

$$\blacklozenge \text{ trouver } \vec{X} \text{ tel que } R(\vec{X}) = \vec{0}$$

L'algorithme de la méthode de Newton se présente alors de la façon suivante:

1. Étant donné \vec{X}_0 un estimé initial;
2. Pour $n \geq 0$:

$$J_n \delta X = -R(\vec{X}_n) \tag{1.19}$$

où J_n est la matrice jacobienne de $R(\vec{X})$ évaluée en \vec{X}_n ;

3. $\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n + \delta X$;
4. Si $\|\delta X\| < \epsilon$ et $\|R(\vec{X}_n)\| < \epsilon$, arrêter.

Sinon, retourner à l'étape 2.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, le problème peut se formuler de la façon suivante:

$$\blacklozenge \text{ trouver } (\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \vec{d}_h) \text{ tel que } R(\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \vec{d}_h) = 0$$

où $R(\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \mathbf{d}_h)$ est défini par:

$$R(\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \mathbf{d}_h) = \begin{cases} A\vec{u}_h + B^t p_h - \vec{C}(\tau_h, \mathbf{d}_h) \\ B\vec{u}_h \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K(\vec{u}_K, \tau_K) \tau_K - G_K(\vec{u}_K) - H_K \tau_K^- \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} D_K \mathbf{d}_K - F_K(\vec{u}_K) \end{cases}$$

La difficulté de ce problème est de résoudre le système (1.19) sans calculer J_n explicitement. En effet, le calcul de la matrice jacobienne à chaque itération demande beaucoup d'espace mémoire, vu la grande taille du système à résoudre. Pour ne pas avoir à construire cette matrice globale explicitement à chaque itération, on prend une approximation de type différences finies, c'est-à-dire:

$$J\vec{d} \approx \frac{R(\vec{X} + h\vec{d}) - R(\vec{X})}{h} \quad (1.20)$$

où $\vec{X} = (\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \mathbf{d}_h)^t$ et h est petit (de l'ordre de 10^{-6} en pratique).

Le système à résoudre est cependant fortement non linéaire, ce qui cause des problèmes de convergence. Pour obtenir un meilleur conditionnement du système, nous utilisons plutôt le résidu préconditionné $\tilde{R}(\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \mathbf{d}_h)$ [9, 12] défini de la manière suivante:

$$\blacklozenge \tilde{R}(\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \mathbf{d}_h) = (\delta\vec{u}, \delta p, \delta\tau, \delta\mathbf{d})^t, \text{ où } \delta\vec{u}, \delta p, \delta\tau \text{ et } \delta\mathbf{d} \text{ sont définis}$$

comme suit:

1. On résout le problème de Stokes suivant:

$$A\delta\vec{u} + B^t\delta p = -A\vec{u}_h - B^tp_h + \vec{C}(\tau_h, \mathbf{d}_h)$$

$$B\delta\vec{u} = -B\vec{u}_h$$

et on obtient une solution corrigée en vitesse, $\tilde{u} = \vec{u}_h + \delta\vec{u}$

2. On résout la loi de comportement linéarisée par la méthode de Newton pour \tilde{u}_K fixé, pour chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad J_K(\tilde{u}_K, \tau_K)\delta\tau_K = -M_K(\tilde{u}_K, \tau_K)\tau_K + G_K(\tilde{u}_K) + H_K\tau_K^-$$

où J_K est la matrice jacobienne provenant de la linéarisation par la méthode de Newton, u_h étant fixé. Le résidu $\delta\tau$ est constitué de tous les résidus élémentaires $\delta\tau_K$.

3. On calcule les projections locales du tenseur $\dot{\gamma}(\tilde{u})$:

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad D_K\delta\mathbf{d}_K = -D_K\mathbf{d}_K + F_K(\tilde{u}_K)$$

Le résidu $\delta\mathbf{d}$ est constitué de tous les résidus élémentaires $\delta\mathbf{d}_K$.

La définition de ce nouveau résidu \tilde{R} revient tout simplement à préconditionner le résidu R avec l'inverse d'une matrice \tilde{J} , qui est une matrice bloc-diagonale construite avec les matrices jacobiennes des sous-problèmes découplés. Pour la résolution du système (1.19), on utilise la méthode itérative GMRES (Generalized minimal residual) [24, 9]. Cette méthode a été développée pour résoudre des systèmes linéaires non symétriques. Dans l'algorithme GMRES, la matrice jacobienne n'est présente que dans des produits matrice-vecteur. Ceci nous évite donc de construire explicitement la matrice jacobienne globale en utilisant l'expression (1.20), ce qui réduit considérablement l'espace mémoire nécessaire.

Lors de la résolution de certains problèmes d'écoulements viscoélastiques, on observe de fortes variations du tenseur des extra-contraintes sur certaines parties du domaine. On doit alors raffiner le maillage dans ces régions critiques pour s'assurer d'avoir une solution suffisamment précise, ce qui peut augmenter considérablement le nombre d'éléments, et par conséquent, augmenter les coûts en temps de calculs et en mémoire informatique. Il est donc avantageux d'utiliser une méthode adaptative qui permette de raffiner le maillage uniquement dans les régions où cela est nécessaire. Dans le prochain chapitre, nous discutons de stratégies adaptatives en éléments finis. Nous présentons ensuite au troisième chapitre la stratégie adaptative que nous avons développée pour les problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques.

Chapitre 2

Stratégies adaptatives

Généralement, pour un problème donné, on cherche à obtenir une solution qui soit la plus précise possible. Lors de la discrétisation du problème, l'utilisation d'un nombre restreint de degrés de liberté ne permet pas toujours d'avoir la précision souhaitée, alors qu'un nombre trop grand de degrés de liberté peut rendre le problème impossible à résoudre avec les ressources informatiques disponibles. Les méthodes d'éléments finis adaptatives peuvent donc devenir une alternative intéressante, permettant ainsi d'obtenir une solution suffisamment précise tout en minimisant les coûts de calculs.

Dans ce chapitre, nous faisons une revue des concepts généraux que l'on retrouve dans les méthodes adaptatives en éléments finis. Nous présentons brièvement les différents types de stratégies adaptatives. Nous exposons ensuite la méthodologie générale d'une méthode adaptative, puis nous expliquons plus en détails les différentes composantes du processus adaptatif, telle que l'estimation d'erreur, l'opérateur de transition et le remaillage. L'ensemble de cette revue est inspirée de celle faite par Hétu [13]. De même, la section consacrée à l'estimation d'erreur *a posteriori* est ins-

pirée d'une partie de l'article de Ainsworth-Oden [1], qui font une analyse théorique complète de différents types d'estimation d'erreur en éléments finis. Dans ce qui suit, nous utilisons la même terminologie que celle employée par Hétu [13].

2.1 Types de méthodes adaptatives

La discrétisation d'un problème par la méthode d'éléments finis est caractérisée par le maillage et l'ensemble des fonctions d'interpolation utilisés. Une méthode d'éléments finis adaptative peut alors être vue comme un processus itératif par lequel on modifie une discrétisation initiale dans le but d'atteindre une précision fixée au départ. Pour cela, il existe plusieurs stratégies adaptatives possible. Par exemple, on peut modifier le maillage ou enrichir les fonctions de base afin d'obtenir une meilleure solution. Les principales techniques adaptatives sont les suivantes:

- les méthodes p ;
- les méthodes h ;
- les méthodes r ;
- les méthodes combinées.

Nous faisons ici une brève description de ces méthodes adaptatives. Pour une revue plus complète sur ces différents types de stratégies adaptatives, le lecteur peut se référer à Hétu [13] et Zaki [35].

Tout d'abord, les méthodes de type p consiste à varier le degré des polynômes d'interpolation sur un maillage fixé pour obtenir la précision voulue. Ainsi, on augmente le degré des polynômes d'interpolation sur les éléments situés dans les régions critiques du domaine. Cette stratégie adaptative est difficile à implémenter dans un résolveur d'éléments finis déjà existant dû au fait que le nombre de degré de libertés et l'espace des fonctions de base élémentaires varient d'un élément à l'autre.

Les méthodes de type h modifie plutôt le maillage pour obtenir la précision désirée. On raffine donc le maillage dans les régions critiques et on grossit la taille des éléments dans les régions où la solution est sujette à peu de variations. Il existe deux types de méthodes h : la méthode de raffinement local et la méthode de re-maillage. La première cherche à améliorer le maillage déjà existant, en subdivisant les éléments dans les régions critiques du domaine et en regroupant ceux-ci dans les régions où l'erreur estimée est faible. Dans la deuxième méthode, on génère à chaque cycle adaptatif un nouveau maillage à l'aide d'une distribution de tailles estimées. Cette dernière méthode a comme avantage d'être plus flexible et de permettre une adaptation plus rapide du maillage. C'est d'ailleurs cette méthode que nous adoptons dans la stratégie adaptative présentée au chapitre 3.

Les méthodes de type r consiste à améliorer la précision de la solution en déplaçant les noeuds du maillage actuel. Ces méthodes ont l'avantage de ne pas augmenter

le nombre de degrés de liberté du maillage, mais elles sont limitées par le fait que l'on ne peut pas déplacer les noeuds de façon tout à fait arbitraire car cela pourrait générer des éléments trop étirés, ce qui affecterait la qualité du maillage [13]. C'est pourquoi cette méthode est habituellement combinée avec une méthode de type h afin d'améliorer la qualité du nouveau maillage.

Il est aussi possible de faire une combinaison de ces méthodes afin d'avoir une méthode qui soit plus performante. Les méthodes combinées fréquemment utilisées sont les méthodes de type h - p , qui permettent généralement d'obtenir un taux de convergence exponentiel [13, 35]. On peut aussi considérer des méthodes de types h - r et h - p - r .

Dans ce travail, seules les techniques de type h et r sont utilisées puisqu'elles sont facilement compatibles avec un code d'éléments finis déjà existant. Ainsi, dans les sections qui suivent, nous traitons seulement les aspects concernant l'adaptation de maillage.

2.2 Méthodologie générale

Les principales étapes d'une méthode d'éléments finis adaptative sont les suivantes: la résolution numérique du problème variationnel, l'estimation d'erreur *a posteriori* et la génération d'un nouveau maillage. L'estimation d'erreur nous donne

une mesure de la précision de la solution obtenue, alors que la génération d'un nouveau maillage nous permet d'obtenir une discrétisation qui soit mieux adaptée au problème à résoudre. Ce processus adaptatif peut être défini par l'algorithme suivant:

1. Générer un maillage initial;
2. Calculer une solution numérique sur le maillage actuel;
3. Obtenir une estimation d'erreur;
4. Si l'erreur relative estimée est plus petite que la borne fixée, arrêter;
Sinon, passer à l'étape 5;
5. Opérateur de transition;
6. Générer un nouveau maillage;
7. Retourner à l'étape 2;

En se référant à cet algorithme, on définit un cycle adaptatif comme étant l'ensemble des étapes 2 à 6. Notons que la résolution numérique du problème (étape 2) a déjà été traitée au chapitre 1. À l'étape 5, l'opérateur de transition permet de faire le lien entre l'erreur estimée et la distribution de tailles élémentaires que devrait avoir le prochain maillage afin d'atteindre la précision désirée. Nous donnons une définition plus précise de l'opérateur de transition à la section 2.4. Dans les sections 2.3 et 2.5, nous discutons respectivement des aspects reliés à l'estimation d'erreur et au remaillage.

2.3 Estimation d'erreur *a posteriori*

En pratique, on ne connaît pas l'erreur exacte commise lors de la discrétisation. La construction d'une approximation de cette erreur nous donne une idée de la précision de la solution calculée. De plus, dans le cadre des méthodes adaptatives, l'estimation d'erreur est une composante essentielle du processus, permettant de calculer la distribution de tailles des éléments du maillage pour le cycle adaptatif suivant. C'est pourquoi l'estimateur d'erreur *a posteriori* doit être en mesure d'approcher correctement non seulement l'erreur totale sur le domaine Ω , mais aussi l'erreur commise sur chaque élément. Un bon estimateur d'erreur doit donc posséder les propriétés suivantes:

- L'estimateur d'erreur doit tendre vers l'erreur exacte lorsque la taille élémentaire tend vers zéro;
- L'estimateur d'erreur doit prendre en compte la physique du problème et les variations de l'ensemble des variables calculées;
- L'estimateur d'erreur doit être peu coûteux à construire relativement aux coûts de la résolution du problème global.

Jusqu'à maintenant, plusieurs techniques d'estimation d'erreur ont été développées pour des problèmes elliptiques. Dans la littérature, les trois types d'estimation d'erreur que l'on retrouve le plus souvent sont les suivantes:

- les méthodes de projection;

- les méthodes de résidus élémentaires;
- les méthodes de résolution de problèmes locaux.

Afin d'illustrer ces trois types d'estimation d'erreur de façon simple et concise, nous présentons à la sous-section suivante un problème elliptique type. Nous discutons ensuite du choix d'une norme dans l'espace discret V_h , afin de pouvoir évaluer l'erreur élémentaire et l'erreur globale. Dans les sous-sections 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5, nous faisons une brève description de chacun de ces trois types d'estimation d'erreur dans le cadre de la résolution du problème type. Finalement, à la sous-section 2.3.6, nous présentons une définition de l'indice d'efficacité.

2.3.1 Problème type

On considère le problème elliptique type suivant:

♦ trouver $u \in C^2(\Omega)$ tel que:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(\vec{x}) \nabla u) &= f(\vec{x}) \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbf{R}^2 \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

où a est une fonction continûment différentiable sur Ω , positive et bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes a_1 et a_2 telles que $0 < a_1 \leq a(\vec{x}) \leq a_2$. De plus, on suppose que f est suffisamment régulière pour que le problème (2.1) soit bien posé.

La formulation variationnelle associée à ce problème est donnée par:

◆ trouver $u \in V = H_0^1(\Omega)$ tel que:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \int_{\Omega} f v \, d\vec{x} \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

De même, en choisissant un sous-espace discret approprié $V_h \subset V$, le problème (2.2) est approché par le problème discret suivant:

◆ trouver $u_h \in V_h \subset V$ tel que:

$$\int_{\Omega} a \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\vec{x} = \int_{\Omega} f v_h \, d\vec{x} \quad \forall v_h \in V_h$$

Notre but est de pouvoir évaluer l'erreur commise lorsqu'on estime la solution u par u_h , c'est-à-dire $e = u - u_h$.

2.3.2 Norme de l'erreur

Pour les méthodes adaptatives, il est généralement plus utile d'avoir une mesure de l'erreur sur chaque élément, plutôt que de connaître cette erreur de façon ponctuelle à travers tout le domaine. C'est pourquoi la norme de l'erreur est prise en considération, tant au niveau élémentaire que global. Ainsi, en pratique, on évalue

la norme de l'erreur au niveau élémentaire, c'est-à-dire:

$$\|e\|_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

et on obtient la norme de l'erreur globale de la façon suivante:

$$\|e\|_\Omega^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|e\|_K^2$$

Dépendamment de l'espace discret V_h , il peut exister plusieurs choix de normes. Ce choix dépend généralement du type de problème à résoudre. Pour le problème (2.2), on pourrait par exemple choisir l'une des normes suivantes:

la norme $H^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_{1,\Omega}$:

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left\{ \int_\Omega u^2 + \nabla u \cdot \nabla u \, d\vec{x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

la semi-norme $H_0^1(\Omega)$, $|\cdot|_{1,\Omega}$:

$$|u|_{1,\Omega} = \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, d\vec{x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

la norme énergie, $|||\cdot|||_\Omega$:

$$|||u|||_\Omega = \left\{ \int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla u \, d\vec{x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Bien que les normes $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $|\cdot|_{1,\Omega}$ et $|||\cdot|||_{\Omega}$ ne mesurent pas exactement les mêmes quantités, il est possible de montrer que ces normes sont équivalentes.

2.3.3 Méthode de projection

Cette méthode d'estimation d'erreur consiste à estimer l'erreur commise sur les dérivées de u . On cherche alors à calculer l'erreur suivant la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ ou la norme énergie $|||\cdot|||_{\Omega}$. Étant donné que l'on ne connaît pas les valeurs exactes des dérivées de u , on remplace ∇u par une fonction $\nabla \tilde{u}$ qui sera plus précise que le gradient de la solution éléments finis ∇u_h . Ainsi, en calculant la différence $\nabla(\tilde{u} - u_h)$, on devrait avoir une bonne indication de l'erreur commise sur ∇u , et par conséquent sur u , pourvu que $\nabla \tilde{u}$ est suffisamment près de ∇u .

La fonction $\nabla \tilde{u}$ est construite de la façon suivante. Dans la formulation forte du problème, on suppose que la solution exacte $u \in C^2(\Omega)$, alors que dans la formulation faible $u \in H^1(\Omega)$. Donc la solution éléments finis u_h est seulement une fois différentiable et, par conséquent, ∇u_h est discontinu aux interfaces des éléments. On construit $\nabla \tilde{u}$ en projetant les dérivées de u_h dans V_h , l'espace discret de u_h . On obtient ainsi une approximation continue des dérivées de u , ce qui devrait donner une approximation de ∇u plus précise que ∇u_h .

Cette projection peut être faite de diverses façons. Par exemple, la méthode la

plus simple est de faire une moyenne aux noeuds pondérée par l'aire des éléments adjacents. Dans la littérature, les estimateurs les plus populaires sont les méthodes de projection globale L^2 et de projection locale par moindres carrés développées par Zienkiewicz et Zhu [37, 39, 40]. De façon générale, ce type d'estimateur d'erreur à l'avantage d'être facile à implémenter et peu coûteux en termes de calculs, tout en approximant bien l'erreur [1]. Cependant, la méthode de projection n'utilise que la solution u_h et ne tient pas compte de la physique du problème, comme les conditions aux limites et la fonction f dans l'expression (2.1) [14, 1]. Pour une description et une analyse complète de ce type d'estimateur, le lecteur peut consulter les références suivantes [1, 2, 41, 37, 38, 39, 40].

2.3.4 Méthode des résidus élémentaires

Cette méthode d'estimation consiste à évaluer l'erreur en utilisant les résidus élémentaires, que nous définissons plus loin dans cette sous-section. Comparativement à la méthode de projection, cette méthode prend en compte les conditions aux limites et le terme de droite f .

Soit \mathcal{T}_h , une triangulation de Ω . Étant donnée une solution u_h provenant de la résolution par éléments finis, on peut écrire la solution exacte du problème (2.2) comme étant la somme de u_h et de l'erreur exacte e . Donc, en remplaçant $u = u_h + e$

dans l'expression (2.2), on obtient une formulation variationnelle pour l'erreur:

$$\int_{\Omega} a \nabla e \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \int_{\Omega} f v \, d\vec{x} - \int_{\Omega} a \nabla u_h \cdot \nabla v \, d\vec{x} \quad \forall v \in V \quad (2.3)$$

L'expression (2.3) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\int_{\Omega} a \nabla e \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K f v \, d\vec{x} - \int_K a \nabla u_h \cdot \nabla v \, d\vec{x} \right\} \quad \forall v \in V$$

En appliquant le théorème de la divergence sur chaque éléments, on obtient:

$$\int_{\Omega} a \nabla e \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K f v \, d\vec{x} + \int_K \nabla \cdot (a \nabla u_h) v \, d\vec{x} - \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} v \, ds \right\} \quad \forall v \in V$$

Ceci peut se réécrire sous la forme

$$\int_{\Omega} a \nabla e \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K r v \, d\vec{x} + \sum_{\gamma \in \partial \mathcal{T}_h} \int_{\gamma} R v \, ds$$

où $r = f + \nabla \cdot (a \nabla u_h)$ est le résidu élémentaire interne et $R = -a \frac{\partial u_h}{\partial n}$ est le résidu élémentaire au bord. En fait, le résidu au bord R représente le saut du flux à l'interface élémentaire. Donc, sur un côté γ commun à deux éléments K et J , on réécrit R comme étant:

$$R(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \left[a \frac{\partial u_K(\vec{x})}{\partial n} \right]_{K,J} = -\frac{1}{2} \left(a \frac{\partial u_K(\vec{x})}{\partial n_K} + a \frac{\partial u_J(\vec{x})}{\partial n_J} \right)$$

Il est possible de montrer que [1]:

$$|||e|||^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K^2 \|r\|_K^2 + \frac{1}{2} h_K \|R\|_{\partial K}^2 \right\} \quad (2.4)$$

Ainsi, on choisit l'estimateur d'erreur élémentaire comme étant:

$$\|e_h\|_K^2 = h_K^2 \|r\|_K^2 + \frac{1}{2} h_K \|R\|_{\partial K}^2$$

Donc, pour construire l'estimateur d'erreur voulu, il suffit d'évaluer sur chaque élément la norme des résidus élémentaires r et R . La solution u_h étant déjà calculée, cet estimateur d'erreur est peu coûteux en termes de temps de calculs. Cependant, cette méthode ne fournit qu'une borne supérieure de l'erreur. De plus, on ne connaît pas *a priori* la valeur de la constante C dans l'inégalité (2.4). Pour une analyse d'erreur plus détaillée sur cet estimateur d'erreur, le lecteur peut consulter Ainsworth-Oden [1] et Verfürth [30, 31]. De plus, pour avoir des applications de ce type d'estimation d'erreur pour résoudre les équations de Navier-Stokes, on peut regarder les références [7, 32].

2.3.5 Méthode de résolution de problèmes locaux

La méthode de résolution de problèmes locaux part de l'idée que l'on veut résoudre le problème associé à la formulation (2.3), c'est-à-dire:

♦ trouver $e \in V$ tel que:

$$\int_{\Omega} a \nabla e \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \int_{\Omega} f v \, d\vec{x} - \int_{\Omega} a \nabla u_h \cdot \nabla v \, d\vec{x} \quad \forall v \in V \quad (2.5)$$

Ainsi, on peut obtenir un estimateur d'erreur e_h de la résolution de ce problème par la méthode des éléments finis. Cependant, résoudre ce problème global pour l'erreur demande autant de ressources que celles utilisées pour le problème (2.2).

Afin d'obtenir une estimation d'erreur à faible coût, on envisage plutôt la résolution de plusieurs problèmes élémentaires indépendants. Rappelons que la formulation variationnelle (2.2) peut s'écrire sous la forme:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K a \nabla u \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v \, d\vec{x} + \sum_{\gamma \in \partial \mathcal{T}_h} \int_{\gamma \setminus \partial \Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds \quad (2.6)$$

Donc, la formulation élémentaire associée à (2.6) est donnée par:

$$\int_K a \nabla u \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \int_K f v \, d\vec{x} + \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds \quad (2.7)$$

En remplaçant u par $u_h + e$ dans le terme de gauche de (2.7), on a une formulation variationnelle élémentaire pour l'erreur:

$$\int_K a \nabla e \cdot \nabla v \, d\vec{x} = \int_K (f v - a \nabla u_h \cdot \nabla v) \, d\vec{x} + \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

Il suffit donc de résoudre les problèmes locaux associés avec cette dernière formulation élémentaire afin d'obtenir un estimateur d'erreur sur chaque élément. Pour cela, il est important de choisir un bon espace de discrétisation. Si on utilise les mêmes fonctions de base que pour u_h , on voit facilement par l'expression (2.5) que l'estimateur d'erreur e_h sera identiquement nul. Il est donc nécessaire de choisir un espace élémentaire $\tilde{P}(K)$ de degré plus élevé que $P(K)$, l'espace dans lequel se trouve u_h . Par exemple, si la solution u_h est un polynôme de degré p , on peut choisir $\tilde{P}(K)$ de degré $p + 1$. De plus, ne connaissant pas la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n}$, on ne peut pas calculer de terme de flux de façon exacte. Pour remédier à cela, sur chaque côte d'un élément K , on évalue le flux par:

$$a \frac{\partial u}{\partial n} \approx \left\langle a \frac{\partial u_K}{\partial n} \right\rangle = \frac{1}{2} \left[a \frac{\partial u_h}{\partial n} \Big|_K + a \frac{\partial u_h}{\partial n} \Big|_J \right] \quad (2.8)$$

ce qui est en fait la valeur moyenne du flux sur ce coté commun aux éléments K et J . Ainsi, la formulation discrète du problème local est:

♦ trouver $e_h \in \tilde{P}(K)$ tel que:

$$\begin{aligned} \int_K a \nabla e_h \cdot \nabla v_h \, d\vec{x} &= \int_K (f v_h - a \nabla u_h \cdot \nabla v_h) \, d\vec{x} \\ &+ \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left\langle a \frac{\partial u_K}{\partial n} \right\rangle v_h \, ds \quad \forall v_h \in \tilde{P}(K) \end{aligned}$$

Contrairement à la méthode des résidus élémentaires, la méthode de résolution de

problèmes locaux nous permet d'évaluer l'erreur de façon ponctuelle sur un élément. Cet estimateur d'erreur a été utilisé par Pelletier et al. [14, 15] pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Selon eux, cet estimateur d'erreur semble être plus approprié au problème de Navier-Stokes que celui obtenu par la méthode de projection, puisqu'il tient compte de la physique du problème. Bank-Welfert [5] ont également développé un estimateur de ce type pour le problème de Stokes.

2.3.6 Indice d'efficacité

Une des caractéristiques d'un bon estimateur d'erreur est sa convergence vers l'erreur exacte lorsque la taille élémentaire du maillage est très petite. Une mesure de cette propriété est donnée par l'indice d'efficacité global que l'on définit comme suit:

$$\theta = \frac{\|e_h\|_\Omega}{\|e\|_\Omega} \quad (2.9)$$

De même, on peut définir l'indice d'efficacité locale ou élémentaire sur un élément K comme suit:

$$\theta_K = \frac{\|e_h\|_K}{\|e\|_K} \quad (2.10)$$

Ainsi, plus θ est près de 1, meilleure est l'approximation e_h de l'erreur exacte e . On dit que l'estimateur est asymptotiquement exact si:

$$\theta \rightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad h \rightarrow 0$$

De plus, dans le cadre d'une méthode adaptative, on considère θ^i , l'indice d'efficacité au $i^{\text{ième}}$ cycle adaptatif. Si le processus adaptatif est efficace, on peut s'attendre à ce que $\theta^i \rightarrow 1$ lorsque $i \rightarrow \infty$.

2.4 Opérateur de transition

Une fois qu'une estimation d'erreur est calculée, on doit pouvoir utiliser cette information pour générer un nouveau maillage pour lequel la solution éléments finis sera plus précise. Nous introduisons pour cela l'opérateur de transition, dont le but est d'estimer la distribution de tailles que devrait avoir le maillage du prochain cycle adaptatif. L'opérateur de transition est donc fonction de la norme de l'erreur élémentaire estimée et nous donne la taille élémentaire que devrait avoir le nouveau maillage dans cette région, afin qu'il soit mieux adapté au problème traité. Il existe plusieurs types d'opérateur de transition, dépendamment de la méthode adaptative utilisée et de l'objectif d'erreur visé. Nous présentons dans cette section trois types d'opérateur de transition, correspondant aux trois objectifs cibles suivants: l'erreur absolue cible, l'erreur relative cible et la réduction d'erreur. Ces opérateurs sont basés

sur ceux développés par Zienkiewicz [36]. Nous introduisons d'abord le concept de maillage optimal, qui est une notion clé pour ces opérateurs de transition.

Maillage optimal

Pour une erreur cible donnée, on définit le maillage optimal comme étant le maillage sur lequel le principe d'équirépartition de l'erreur est respecté, à savoir que la norme élémentaire de l'erreur soit la même à travers tout le domaine; c'est-à-dire:

$$\|e\|_K = C \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (2.11)$$

Cependant, en pratique, on n'obtient plutôt des maillages quasi-optimaux. Une autre mesure de l'optimalité d'un maillage est la variance de la norme de l'erreur élémentaire à travers le domaine. Ainsi, pour un maillage optimal, cette variance devrait être nulle. Idéalement, à chaque nouveau cycle adaptatif, on souhaite obtenir un maillage se rapprochant de plus en plus du maillage optimal.

Erreur absolue cible

Nous considérons premièrement l'objectif d'erreur absolue cible. Cet objectif vise à obtenir un maillage optimal ayant comme erreur globale une valeur prédéterminée. Soient E_0 et $E_{0,K}$, l'erreur cible globale et élémentaire respectivement. Par le principe

d'équirépartition de l'erreur, on a que:

$$E_0^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_{0,K}^2 = N E_{0,K}^2$$

Ainsi, en isolant $E_{0,K}$ dans l'expression précédente, on peut écrire l'erreur élémentaire cible sous la forme suivante:

$$E_{0,K} = \frac{E_0}{\sqrt{N}} \quad (2.12)$$

où N est le nombre d'élément sur le maillage courant. On cherche à générer un nouveau maillage qui soit optimal et dont l'erreur élémentaire soit égale à $E_{0,K}$.

Par des résultats théoriques sur l'estimation d'erreur *a priori*, on a que:

$$\|e\| \simeq C h^p \quad (2.13)$$

où C est une constante, h est la taille élémentaire et p est l'ordre de convergence qui dépend du choix de l'espace de discrétisation de la variable concernée et de la solution. Pour un élément K du maillage actuel, on considère donc que:

$$\|e_h\|_K \propto h_K^p \quad (2.14)$$

et par le principe d'équirépartition de l'erreur, on veut que:

$$E_{0,K} \propto \hat{h}_K^p \quad (2.15)$$

où \hat{h}_K est la taille que devrait avoir les éléments du prochain maillage dans la région du domaine déterminée par l'élément K . Donc, par (2.14) et (2.15), on a:

$$\left(\frac{\hat{h}_K}{h_K} \right)^p = \frac{E_{0,K}}{\|e_h\|_K}$$

et, en isolant \hat{h}_K dans l'expression précédente, on trouve la taille élémentaire estimée pour le prochain maillage:

$$\hat{h}_K = h_K \left(\frac{E_{0,K}}{\|e_h\|_K} \right)^{1/p} \quad (2.16)$$

Erreur relative cible

En pratique, il n'est pas nécessairement évident de déterminer la valeur de l'erreur cible qui devrait être choisie pour que la solution soit suffisamment précise; cela dépend de l'échelle des variables prises en compte. Pour remédier à cette difficulté, on adopte plutôt comme stratégie un objectif d'erreur relative cible, qui ne dépend pas de l'ordre de grandeur des variables calculées.

Soit ξ , l'erreur relative globale que l'on vise. On a alors que ξ est défini comme:

$$\xi = \frac{E_0}{\|u_h\|_\Omega}$$

où E_0 est l'erreur globale que l'on souhaiterait avoir au prochain cycle adaptatif. En d'autres termes, on considère que l'erreur cible globale est donnée par:

$$E_0 = \xi \|u_h\|_\Omega$$

Par conséquent, par (2.12), on a que:

$$E_{0,K} = \frac{\xi \|u_h\|_\Omega}{\sqrt{N}} \quad (2.17)$$

En remplaçant $E_{0,K}$ dans l'expression (2.16), on a que la taille estimée pour le prochain maillage est donnée par:

$$\hat{h}_K = h_K \left(\frac{\xi \|u_h\|_\Omega}{\sqrt{N} \|e_h\|_K} \right)^{1/p} \quad (2.18)$$

Réduction d'erreur

Un autre objectif possible est de réduire l'erreur à chaque cycle adaptatif par un facteur donné. Dans ce cas-ci, on ne cherche pas à atteindre une précision fixée d'avance, mais plutôt à obtenir la solution la plus précise suivant un nombre de

cycles fixé ou selon les ressources informatiques dont l'on dispose. D'autre part, cet objectif cible permet généralement une transition plus douce d'un cycle à un autre, ce qui donne parfois des maillages mieux adaptés.

Soit ζ , le facteur de réduction d'erreur choisi et défini par:

$$E_0 = \zeta \|e_h\|_\Omega$$

En substituant l'expression précédente dans (2.12), l'erreur élémentaire visée est donnée par:

$$E_{0,K} = \frac{\zeta \|e_h\|_\Omega}{\sqrt{N}} \quad (2.19)$$

Ainsi, en remplaçant $E_{0,K}$ dans l'expression (2.16), on obtient la taille estimée pour le prochain maillage, c'est-à-dire:

$$\hat{h}_K = h_K \left(\frac{\zeta \|e_h\|_\Omega}{\sqrt{N} \|e_h\|_K} \right)^{1/p} \quad (2.20)$$

2.5 Remaillage

Après avoir estimé la nouvelle distribution de tailles, nous sommes en mesure d'obtenir un maillage qui soit mieux adapté au problème à résoudre, c'est-à-dire qui

soit le plus près possible du maillage optimal. Il existe deux approches pour créer ce nouveau maillage. La première consiste à modifier le maillage actuel en le raffinant là où l'erreur est jugée trop grande et en regroupant des éléments ensemble dans les régions où l'erreur est très faible; c'est ce qu'on appelle l'adaptation de maillage ou raffinement local. La deuxième approche est le remaillage, où l'on génère un nouveau maillage en tenant compte uniquement de la distribution de tailles estimée, et non du maillage actuel. Bien que cette deuxième approche nécessite plus de temps de calcul à chaque cycle, elle est plus flexible que le raffinement local puisqu'elle permet des transitions d'éléments plus douces et plus régulières pour une même région du domaine, et par conséquent une convergence plus rapide, en termes de cycles adaptatifs, vers un maillage quasi-optimal. C'est pour cette raison que nous optons dans ce travail pour une stratégie de remaillage adaptatif plutôt que de raffinement local.

Pour générer un nouveau maillage, un générateur de maillage non structurés est généralement utilisé. Il existe plusieurs types de générateur de maillage, dont les plus utilisés sont les mailleurs de type frontal et les mailleurs de type Delaunay. Dans le cadre de ce travail, nous utilisons plutôt un mailleur de type incrémental [28]. Nous donnons plus de détails au chapitre suivant sur la stratégie de remaillage que nous utilisons pour notre méthode adaptative.

Chapitre 3

Méthode adaptative pour les fluides viscoélastiques

Ces dernières années, les méthodes d'éléments finis adaptatives ont été de plus en plus utilisées pour la résolution des équations de Navier-Stokes (voir Hétu [13] pour une revue de ces méthodes). Cependant, peu de stratégies adaptatives ont été développées pour les problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques, où on retrouve le couplage d'un système de Stokes de caractère elliptique avec une loi de comportement du fluide, qui est non linéaire et de type hyperbolique. Pour cela, le choix d'une stratégie adaptative pour ces types de problème n'est pas nécessairement une chose évidente. En fait, à notre connaissance, les seuls auteurs ayant développé des méthodes adaptatives appliquées aux problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques sont Rao-Finlayson [23] et Warichet-Legat [33, 34]. Rao-Finlayson ont développé une méthode de type h avec un estimateur d'erreur de type résiduel, alors que Warichet-Legat ont plutôt élaboré une méthode de type h - p avec un estimateur d'erreur de type problèmes locaux.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode adaptative s'appliquant spé-

cifiquement aux problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques. Plus particulièrement, nous discuterons de l'estimateur d'erreur, la stratégie adaptative et la technique de remaillage que nous utilisons.

3.1 Estimateur d'erreur

Dans la plupart des simulations d'écoulements de fluides viscoélastiques, on observe que le tenseur des extra-contraintes τ est sujet à de plus fortes variations que les autres variables du système. Par conséquent, l'erreur de discrétisation commise sur τ dans la résolution numérique est généralement dominante par rapport à celles des autres variables. Pour cette raison, notre estimateur d'erreur tient compte uniquement de l'erreur sur le tenseur τ , bien que l'on puisse aisément y introduire la variable \mathbf{d} . Cet estimateur d'erreur est obtenu par la résolution d'une équation aux dérivées partielles en terme de τ . Cette méthode d'estimation d'erreur a d'abord été proposée par Oden-Strouboulis [25], puis reprise par Zaki [35] pour des problèmes de convection. Nous en faisons ici une description précise dans le cadre des problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques.

Tout d'abord, rappelons que l'équation caractérisant le tenseur τ est la loi de comportement du fluide, donnée par:

$$\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau)\right) \tau + \lambda \frac{\delta \tau}{\delta t} = 2\eta_v \dot{\gamma}(\vec{u}) \quad (3.1)$$

Comme nous l'avons vu à la section 1.1, la formulation variationnelle associée à l'équation (3.1) est:

$$\int_{\Omega} \left[\left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau) \right) \tau + \lambda \frac{\delta \tau}{\delta t} \right] : \phi \, d\vec{x} = 2\eta_v \int_{\Omega} \dot{\gamma}(\vec{u}) : \phi \, d\vec{x} \quad \forall \phi \in \Sigma \quad (3.2)$$

L'idée de base de l'estimation d'erreur est la suivante: étant donnée une solution élément fini $(\vec{u}_h, p_h, \tau_h, \mathbf{d}_h)$ obtenue sur une triangulation \mathcal{T}_h , on remplace dans la formulation variationnelle précédente τ et \vec{u} par $\tau_h + \mathbf{e}$ et \vec{u}_h respectivement, où \mathbf{e} est l'erreur exacte commise sur τ lors de la résolution numérique. Ainsi, on obtient un problème variationnel en fonction de l'erreur \mathbf{e} . Ce problème est discrétisé par la méthode de Lesaint-Raviart (présentée à la section 1.4.2) afin d'obtenir l'estimateur d'erreur \mathbf{e}_h . On a donc la formulation discrète suivante:

$$\begin{aligned} \int_K \left\{ \left(1 + \frac{\lambda \epsilon}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h + \mathbf{e}_h) \right) (\tau_h + \mathbf{e}_h) + \lambda \left(\frac{\delta \tau_h}{\delta t} + \frac{\delta \mathbf{e}_h}{\delta t} \right) \right\} : \phi_h \, d\vec{x} \\ - \lambda \int_{\partial K^-} (\vec{u}_h \cdot \vec{n}_K) (\tau_h + \mathbf{e}_h) : \phi_h \, ds \\ = 2\eta_v \int_K \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \phi_h \, d\vec{x} - \lambda \int_{\partial K^-} (\vec{u}_h \cdot \vec{n}_K) (\tau_h^- + \mathbf{e}_h^-) : \phi_h \, ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cette dernière formulation est linéarisée, ce qui revient à négliger les termes de deuxième ordre en \mathbf{e}_h . Ainsi, le problème discret à résoudre sur chaque élément K est:

♦ trouver $e_h \in [\tilde{P}(K)]_s^{2 \times 2}$ tel que:

$$\begin{aligned}
 & \int_K \left\{ \lambda \frac{\delta e_h}{\delta t} + \frac{\epsilon \lambda}{\eta_v} \text{tr}(e_h) \tau_h + \left(1 + \frac{\epsilon \lambda}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h) \right) e_h \right\} : \phi_h dx \\
 & \quad - \lambda \int_{\partial K^-} (\tilde{u}_h \cdot \tilde{n}_K) e_h : \phi_h ds \\
 & = - \int_K \left\{ \lambda \frac{\delta \tau_h}{\delta t} + \left(1 + \frac{\epsilon \lambda}{\eta_v} \text{tr}(\tau_h) \right) \tau_h \right\} : \phi_h dx + \int_K 2\eta_v \dot{\gamma}(\tilde{u}_h) : \phi_h dx \\
 & \quad - \lambda \int_{\partial K^-} (\tilde{u}_h \cdot \tilde{n}_K) (\tau_h^- - \tau_h + e_h^-) : \phi_h ds \quad \forall \phi_h \in [\tilde{P}(K)]_s^{2 \times 2}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Il suffit donc de résoudre ce dernier système de façon élémentaire pour obtenir une estimation d'erreur sur chaque élément. Pour que cette estimation d'erreur soit non-nulle, on doit choisir l'espace discret $\tilde{P}(K)$ tel que les fonctions de bases soient de degré plus élevé que ceux de l'espace de τ_h . Par exemple, dans le cadre de ce travail, nous utilisons des fonctions de bases linéaires pour τ_h et quadratiques pour e_h .

Cette méthode d'estimation d'erreur ressemble à l'estimation par la résolution de problèmes locaux décrite au chapitre précédent. Cependant, l'estimateur d'erreur e_h est obtenu par la résolution du problème (3.4) sur tout le domaine Ω . En fait, dans la résolution élémentaire par la méthode de Lesaint-Raviart, un terme de bord contenant de l'information des éléments en amont est introduit. Donc, ces problèmes élémentaires ne sont pas entièrement indépendants entre eux, contrairement

à la méthode par problèmes locaux. La résolution du problème (3.4) étant exécutée de façon élémentaire, ceci nous permet tout de même d'obtenir un estimateur d'erreur à faible coût.

Notons que l'estimateur e_h est un tenseur symétrique dont les composantes e_{h11} , e_{h12} et e_{h22} sont des fonctions définies sur chaque élément. Afin d'avoir une mesure de l'erreur élémentaire, on définit respectivement les normes élémentaire et globale suivantes:

$$\|e_h\|_K = \left\{ \int_K (e_{h11}^2 + e_{h12}^2 + e_{h22}^2) d\vec{x} \right\}^{1/2}$$

et

$$\|e_h\|_\Omega^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|e_h\|_K^2$$

La norme de l'erreur globale servira de critère pour déterminer si l'objectif fixé a été atteint. Si cet objectif n'est pas satisfait, les erreurs élémentaires sont utilisées pour estimer les tailles élémentaires pour le prochain maillage.

3.2 Stratégie adaptative

Après avoir estimé l'erreur de τ , on doit être en mesure d'évaluer la distribution de tailles que devrait avoir le maillage amélioré suivant l'objectif visé. Dans les exemples numériques du chapitre suivant, nous optons pour un objectif d'erreur relative cible. Afin d'estimer les tailles nouvelles nous devons connaître l'ordre de

convergence du type de discrétisation utilisée (c'est-à-dire p). Généralement, l'ordre de convergence de la méthode de Lesaint-Raviart sur des maillages non structurés est $O(h^{k+1/2})$, où k est le degré des polynômes utilisés comme fonctions de bases. Par exemple, dans ce travail, nous utilisons des fonctions de bases linéaires pour la discrétisation de τ ($k = 1$) et il a été démontré [22] que l'ordre de convergence est $O(h^{3/2})$. Ainsi, pour une erreur relative cible ξ donnée, la nouvelle taille élémentaire dans la région contenue dans l'élément K du maillage actuel sera (voir la section 2.4):

$$\hat{h}_K = h_K \left(\frac{\xi \|\tau_h\|_\Omega}{\sqrt{N} \|e_h\|_K} \right)^{2/3} \quad (3.5)$$

Notons que dans notre procédure adaptative, h_K est défini comme étant la longueur du plus long côté de l'élément K . Ainsi, cette nouvelle distribution de tailles nous permettra par la suite de régénérer un maillage pour le prochain cycle adaptatif.

3.3 Remaillage

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, nous adoptons une stratégie de remaillage. La routine de remaillage que nous utilisons est de type incrémental et est conçue avec la librairie ADX [28]. Le générateur de maillages a besoin de deux types d'informations: la distribution de taille et la valeur du champ de vitesse au barycentre sur chaque élément.

Le processus de remaillage se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on génère un nouveau maillage suivant une distribution de tailles donnée. Par la suite, les noeuds du maillage sont déplacés de façon à mieux orienter le maillage dans le sens du courant. Cette technique est semblable à celle utilisée dans [29, 19]. Ce traitement a été introduit suite à une observation faite lors d'essais numériques effectués sur des maillages non structurés. En fait, nous avons remarqué la présence d'oscillations sur le tenseur des extra-contraintes qui semblent être causées par une «mauvaise orientation» du maillage et l'utilisation de la méthode de Lesaint-Raviart. Ces oscillations apparaissent lorsque des éléments ont plus d'un côté entrant ou sortant. En alignant un des côtés de chaque élément dans la direction du champ de vitesse, de manière à avoir un côté entrant ∂K^- et un côté sortant ∂K^+ , on espère éliminer ces oscillations. Dans le chapitre suivant, nous illustrons ce phénomène à l'aide d'un exemple numérique.

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous présentons trois problèmes tests nous permettant d'évaluer les performances de la méthode adaptative développée au chapitre précédent. Dans ce travail, nous avons résolu ces problèmes pour des nombres de Weissenberg assez faibles de façon à diminuer les problèmes de convergence. Pour tous les tests que nous avons faits dans ce chapitre, la viscosité élastique du fluide est $\eta_v = 1$. Nous considérons dans un premier temps un problème de couche limite afin de valider notre estimation d'erreur. Puis, nous traitons les problèmes de la contraction 4:1 et d'un écoulement périodique autour d'une rangée de cylindres. Pour chaque problème, nous présentons et analysons les résultats numériques obtenus.

4.1 Problème de couche limite

Afin de valider notre stratégie adaptative, nous avons résolu des problèmes de couche limite pour lesquels on connaît la solution exacte. Cela nous permet d'évaluer l'efficacité de notre estimateur d'erreur en le comparant avec l'erreur exacte. On considère un domaine rectangulaire de dimension 1×5 , tel qu'illustré par la figure 4.1. On suppose que la loi de comportement du fluide suit le modèle de Maxwell, c'est-à-dire que $\epsilon = 0$ dans l'équation (1.3).

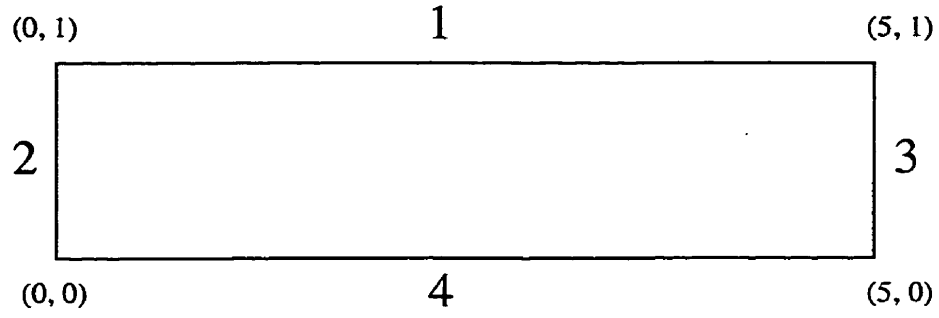


Figure 4.1 Domaine de calcul pour le problème de couche limite.

On impose un champ de vitesse de la forme:

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = (1 - y^n, 0) \quad (4.1)$$

et une pression:

$$p = -x^2 \quad (4.2)$$

Dans ce cas-ci, les composantes du tenseur des extra-contraintes τ sont données par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\lambda\eta_v \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 = 2\lambda\eta_v n^2 y^{2n-2} \\ \tau_{12} &= \eta_v \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\eta_v n y^{n-1} \\ \tau_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour que les variables \vec{u} , p et τ (définies respectivement par les expressions (4.1),

(4.2) et (4.3)) respectent l'équation de mouvement du problème de Stokes, le terme de droite \vec{f} doit être de la forme:

$$\vec{f} = (n(n-1)(\eta_v)y^{n-2} - 2x, 0)$$

Pour la résolution du problème par la méthode des éléments finis, les conditions aux limites imposées sont les suivantes (voir la figure 4.1):

- 1 : $\vec{u} = (0, 0)$;
- 2 : profil de vitesse donnée par l'expression (4.1) en entrée;
- 3 : profil de vitesse donnée par l'expression (4.1) en sortie;
- 4 : axe de symétrie.

La discrétisation de ce problème (et de tous les autres problèmes dans ce chapitre) est celle décrite à la section 1.2. Notons que pour n assez grand, les variables \vec{u} , p et τ ne sont pas contenues dans les espaces discrets \mathcal{V}_h , \mathcal{Q}_h et Σ_h respectivement. Donc, une erreur de discrétisation est commise pour chacune de ces variables lors de la résolution numérique. Par ce choix du champ de vitesse, on observe la formation d'une couche limite près de la paroi supérieure lorsque n est grand. Ainsi, pour bien approcher la solution exacte par la méthode des éléments finis, le maillage doit être suffisamment fin dans la région de la couche limite. Ce problème est donc un bon test pour valider notre procédure adaptative.

Dans les sous-sections 4.1.2 et 4.1.3, nous avons testé notre stratégie adaptative pour les cas où $n = 10$ et $n = 20$ respectivement. De plus, à la sous-section 4.1.1, nous montrons l'effet que peut avoir le maillage sur la qualité de la solution. Dans les résultats numériques qui suivent, on a fixé $\epsilon = 0$ et $\lambda = 1$.

4.1.1 Effet du maillage

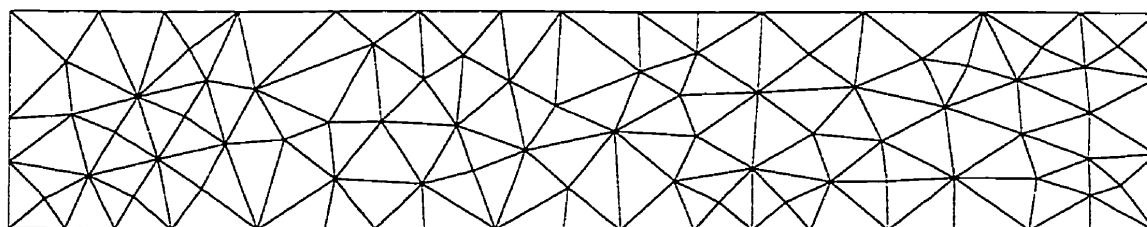
Lors d'essais numériques pour des problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques sur des maillages non structurés, nous avons observé l'apparition d'oscillations sur le tenseur des extra-contraintes τ_h . À notre connaissance, ce phénomène, qui semblait être inconnu jusqu'à maintenant, est dû à la résolution de la loi de comportement par la méthode de Lesaint-Raviart. On a observé que jusqu'ici, dans la littérature, les simulations d'écoulements de fluides viscoélastiques résolues avec la méthode de Lesaint-Raviart ont été faites sur des maillages de quadrilatères ou sur des maillages de triangles, mais assez structurés. Les solutions obtenues dans ces cas-là ne contiennent pas d'oscillations apparentes, ce qui n'est pas le cas pour les simulations faites sur des maillages triangulaires non structurés.

En fait, ces oscillations semblent être causées par une mauvaise orientation du maillage. Plus particulièrement, lorsque certains éléments du maillage ont plus d'un coté entrant ou sortant, on remarque une perturbation dans la solution. Le fait

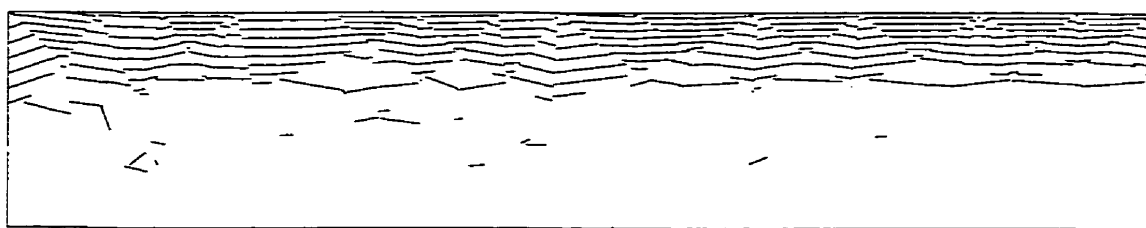
d'orienter le maillage dans le sens du courant, de manière à ce que chaque élément n'ait qu'un côté entrant et qu'un côté sortant, semble diminuer de beaucoup ces oscillations.

Afin d'illustrer ce phénomène, nous résolvons le problème décrit plus haut pour $n = 4$. Les figures 4.2 et 4.3 montrent les courbes de niveau de τ_{11} et τ_{12} respectivement sur un maillage non structuré, «mal orienté», et sur un maillage ayant le même nombre de noeuds, mais mieux orienté dans le sens du courant. On observe une amélioration de τ_{11} et τ_{12} sur le maillage de la figure 4.3, comparativement à la solution sur le maillage non orienté. Notons que la déviation des courbes de niveau sur le côté entrant du domaine est causée par le fait que la condition limite sur le coin supérieure gauche n'est pas bien approchée sur ce maillage trop grossier.

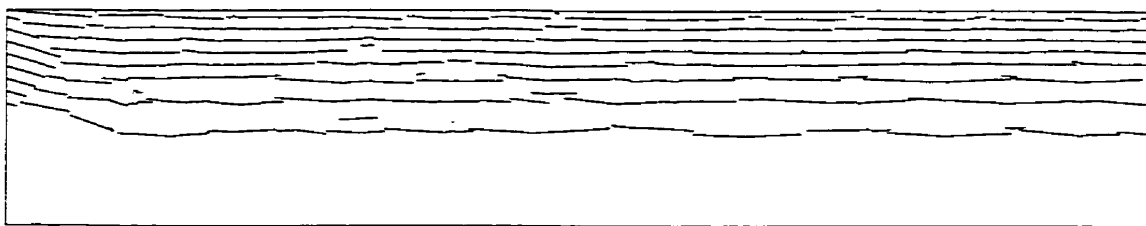
Ainsi, pour atténuer les oscillations, le générateur de maillage utilisé déplace les noeuds du nouveau maillage de manière à orienter le plus possible un côté de chaque élément dans le sens du courant. Ce processus a déjà été décrit à la section 3.3. Dans tous les résultats que nous présentons ultérieurement, ce processus d'orientation du maillage est utilisé.



(a)

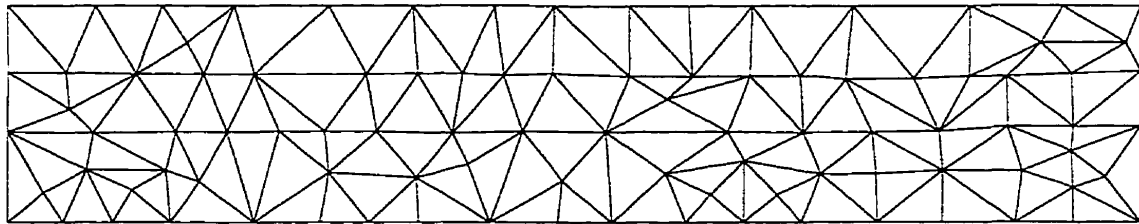


(b)

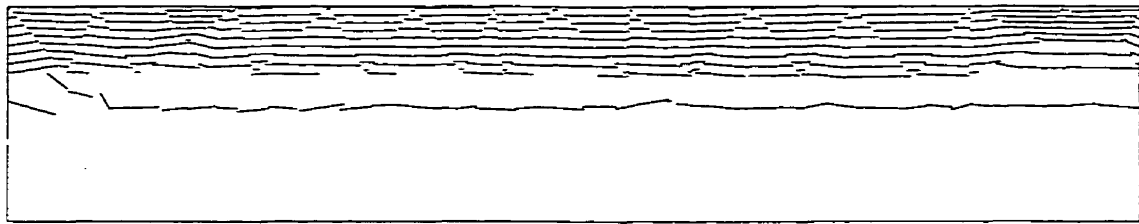


(c)

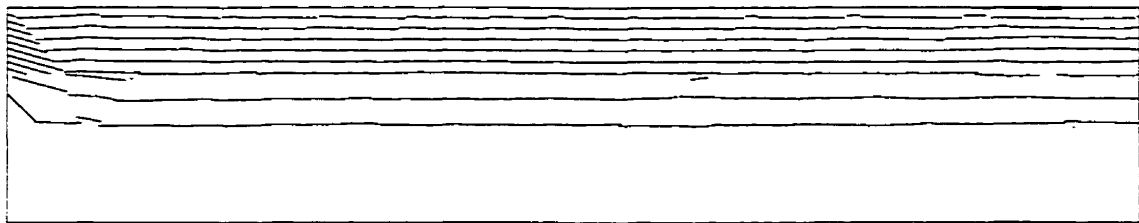
Figure 4.2 Effet de la méthode de Lesaint-Raviart sur un maillage non-structuré:
a) maillage et courbes de niveau de b) τ_{11} et c) τ_{12} .



(a)



(b)



(c)

Figure 4.3 Effet de la méthode de Lesaint-Raviart sur un maillage orienté dans le sens de l'écoulement: a) maillage et courbes de niveau de b) τ_{11} et c) τ_{12} .

4.1.2 Cas $n = 10$

Dans cette sous-section, on considère le problème de couche limite pour $n = 10$. Nous avons résolu ce problème avec notre méthode adaptative en fixant l'erreur relative cible à 1%. Le maillage initial est structuré et est constitué de 88 éléments. À la figure 4.4, on remarque qu'à chaque cycle adaptatif, le maillage devient de plus en plus fin près de la paroi supérieure du domaine, c'est-à-dire au niveau de la couche limite. Des coupes en sortie des variables u_1 , τ_{11} et τ_{12} sur le premier et dernier maillage, ainsi que la solution exacte sont présentées à la figure 4.5. On peut voir par celles-ci que la couche limite est bien approchée au dernier cycle adaptatif. En effet, sur le maillage initial, on voit que la différence entre la solution numérique et la solution exacte est remarquable, alors que sur le dernier maillage, la solution numérique est confondue avec la solution exacte. Les courbes de niveau de τ_{11} au premier et dernier cycle adaptatif sont présentées à la figure 4.7. Elles nous montrent également que le premier maillage est trop grossier pour capter la couche limite, alors que le dernier maillage est bien adapté au problème.

Tableau 4.1 Problème de couche limite ($n = 10$): résultats de l'estimation d'erreur à chaque cycle adaptatif.

Cycle	# éléments	Erreur exacte $ \tau - \tau_h _\Omega$	Erreur estimée $ e_h _\Omega$	Efficacité θ	Erreur relative
0	88	2,6702	1,30237	0,48774	0,15799
1	1280	0,2060	0,13928	0,67594	0,01554
2	1889	0,0792	0,06066	0,76501	0,00676
3	1282	0,1005	0,07256	0,72171	0,00809
4	1035	0,1189	0,09025	0,75872	0,01007

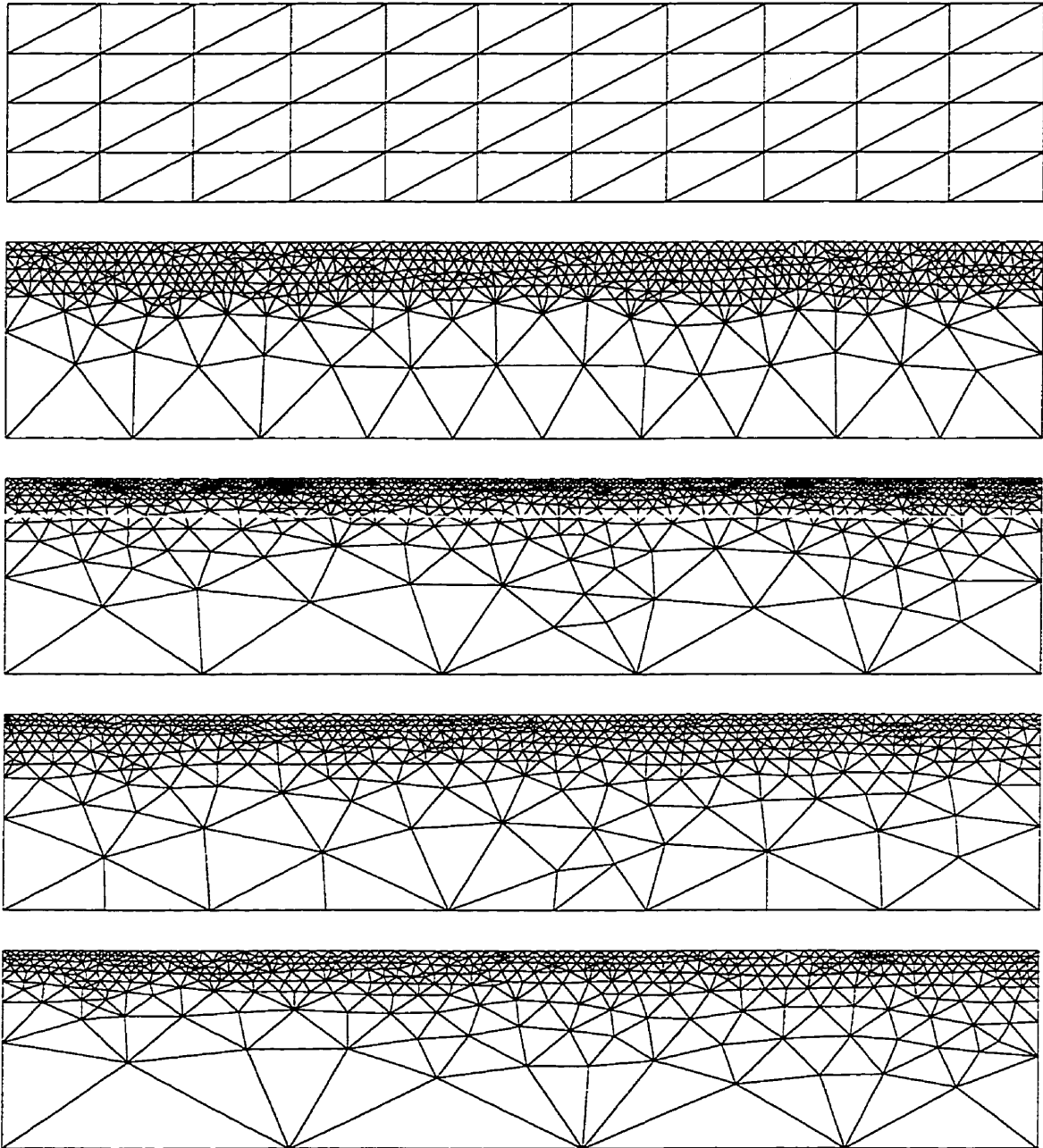


Figure 4.4 Problème de couche limite ($n = 10$): maillages de chaque cycle adaptatif.

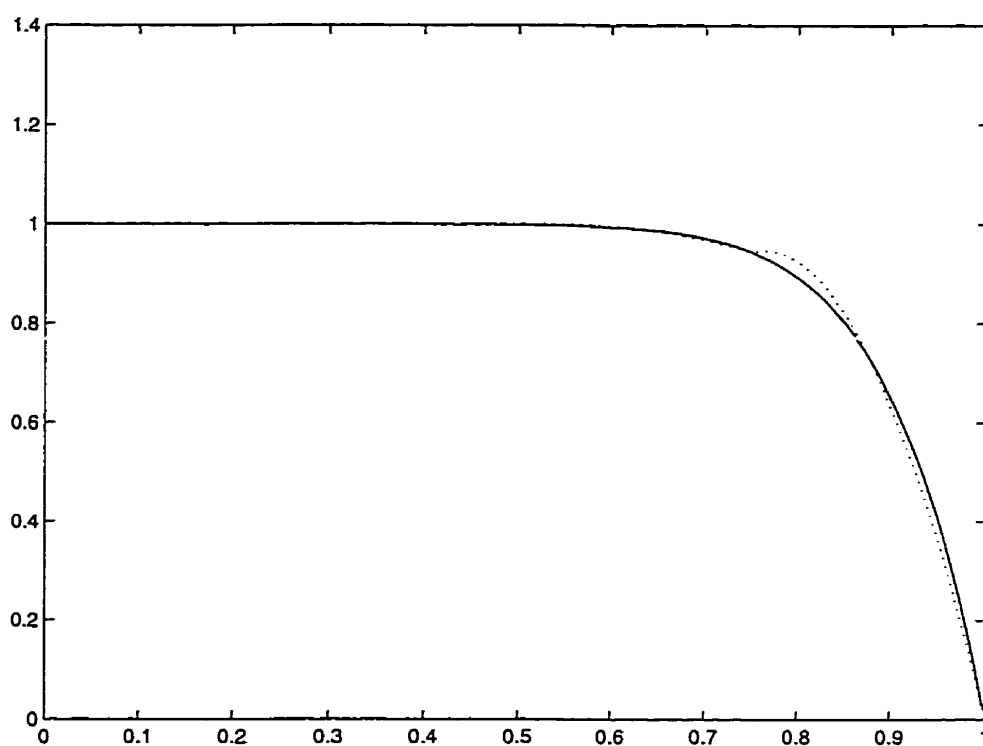
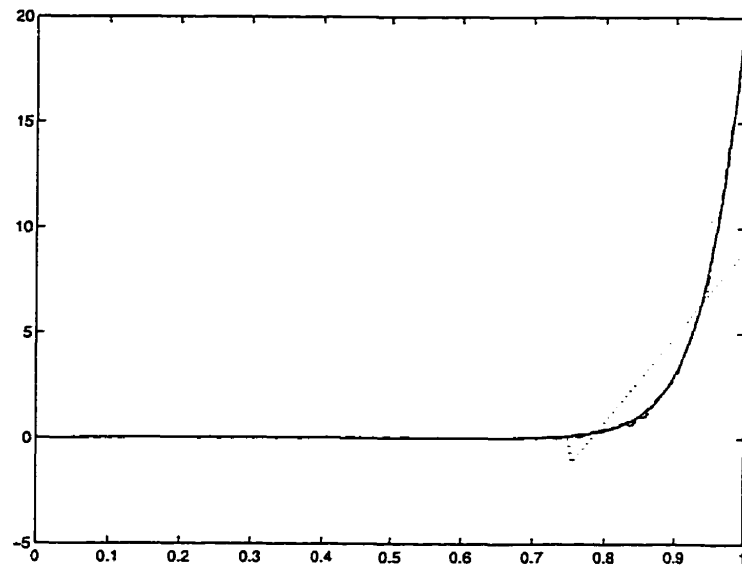
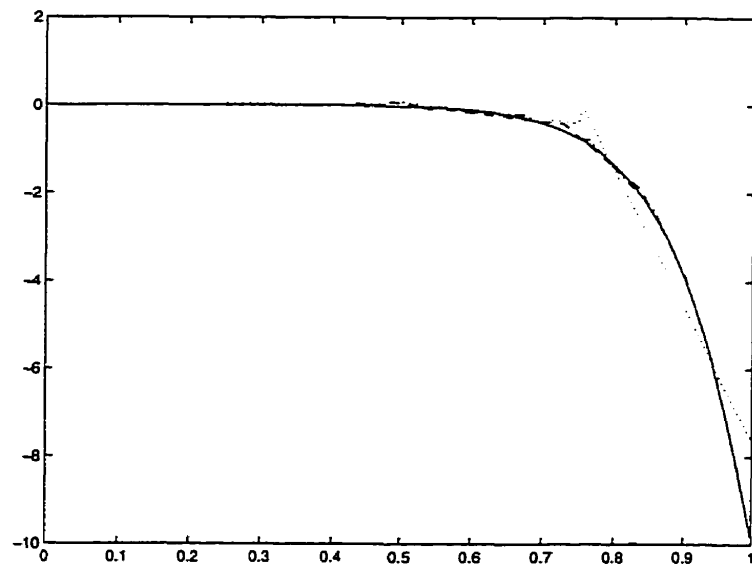


Figure 4.5 Problème de couche limite ($n = 10$): coupe en sortie de la variable u_1 sur le premier (\cdots) et le dernier maillage ($---$) et la solution exacte (trait plein).



(a)



(b)

Figure 4.6 Problème de couche limite ($n = 10$): coupes en sortie des variables a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le premier (\cdots) et le dernier maillage (---) et la solution exacte (trait plein).

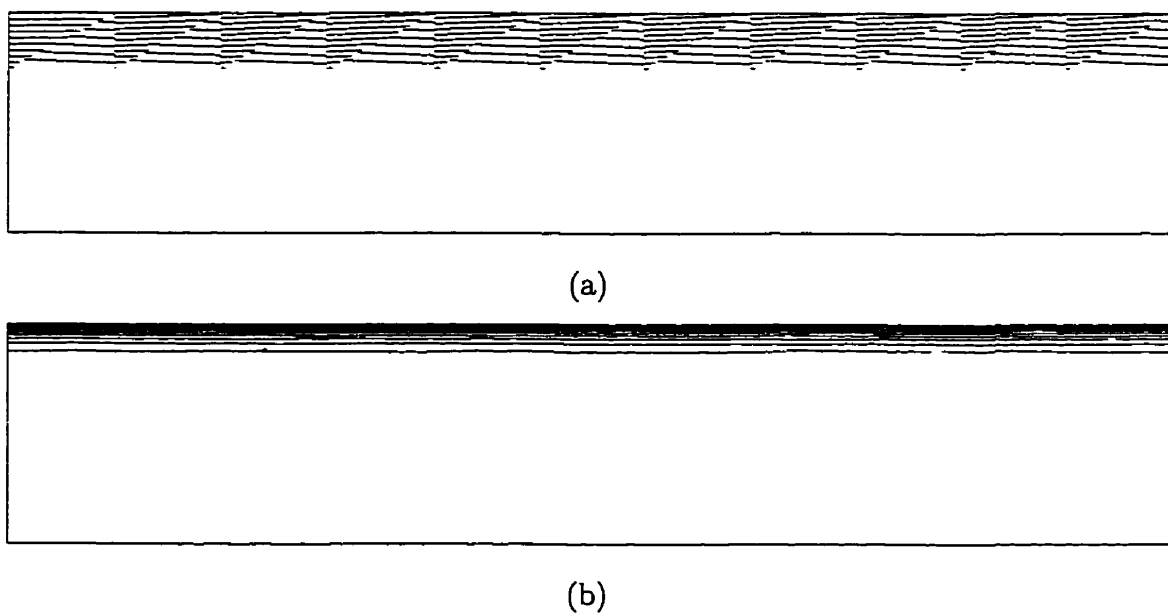


Figure 4.7 Problème de couche limite ($n = 10$): courbes de niveau de τ_{11} sur a) le premier et b) le dernier maillage.

Quant à l'efficacité du processus adaptatif, nous nous référons au tableau 4.1, où sont présentés pour chaque cycle, l'erreur exacte, l'erreur estimée, l'indice d'efficacité et l'erreur relative estimée. Nous remarquons que l'indice d'efficacité au dernier cycle est environ 0,76, ce qui est comparable aux résultats précédemment obtenus par d'autres auteurs dans la littérature [14, 15, 41]. Donc, on peut supposer que ce résultat est raisonnable, bien qu'aucun résultat d'estimation d'erreur dans un cadre de problèmes d'écoulements d'un fluide viscoélastique ne soit disponible pour des fins de comparaison. De plus, l'erreur relative au quatrième cycle est très près de 1%. Notons qu'à partir du deuxième cycle, l'erreur relative est plus petite que 1%, mais nous avons poursuivi le processus jusqu'à ce qu'elle soit presque égale à l'erreur relative cible. Cette approche permet ainsi d'atteindre la précision visée tout en minimisant le nombre d'éléments du maillage final.

4.1.3 Cas $n = 20$

Nous avons aussi traité le problème de couche limite pour le cas où $n = 20$. Ce problème est similaire à celui de sous-section précédente, mais la couche limite est cependant plus mince, et donc plus difficile à capturer. En prenant le même maillage initial que dans le cas $n = 10$, neuf cycles adaptatifs ont été exécutés afin d'atteindre une erreur relative cible de 1%. Cependant, cet objectif n'a pas été fixé directement dès le premier cycle. Nous avons plutôt fixé l'objectif à 10% pour deux premiers cycles, 5% au cycle suivant et 1% pour les derniers cycles. Cette approche

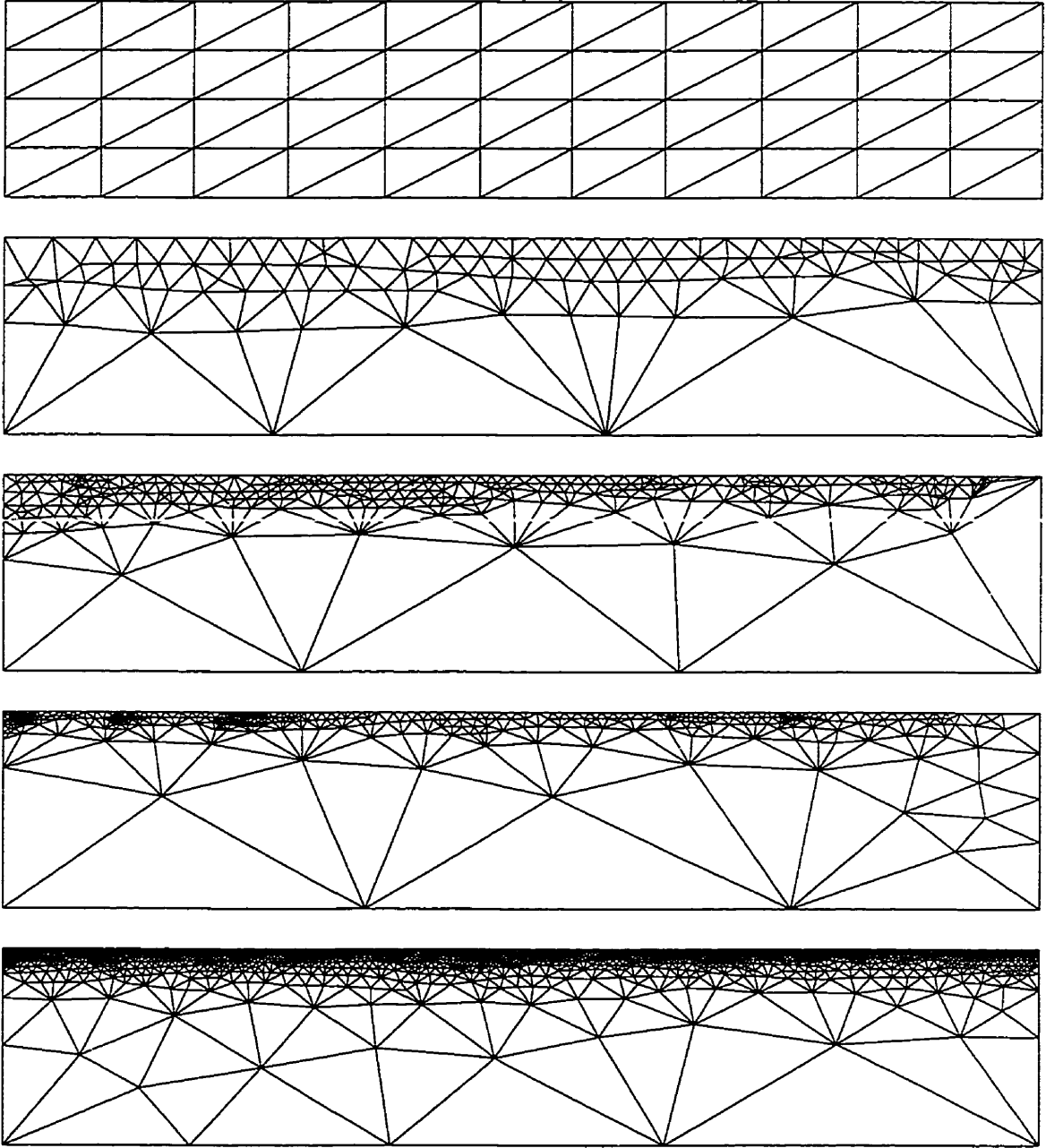


Figure 4.8 Problème de couche limite ($n = 20$): maillages #1, #2, #3, #4 et #10.

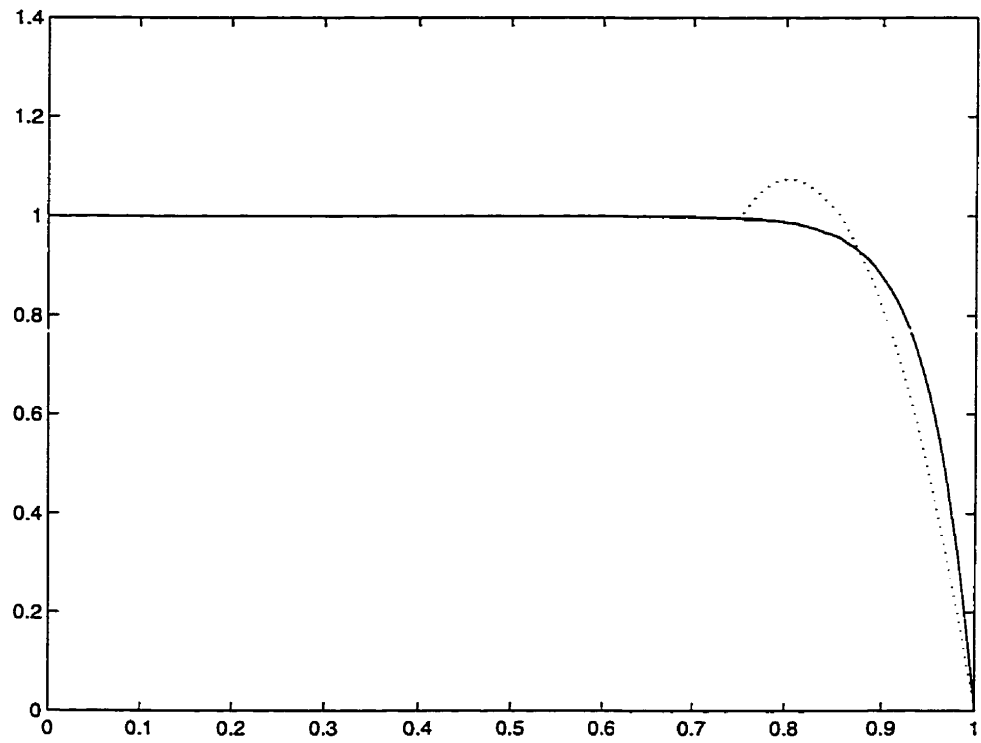


Figure 4.9 Problème de couche limite ($n = 20$): coupe en sortie de la variable u_1 sur le premier (\cdots) et le dernier maillage ($---$) et la solution exacte (trait plein).

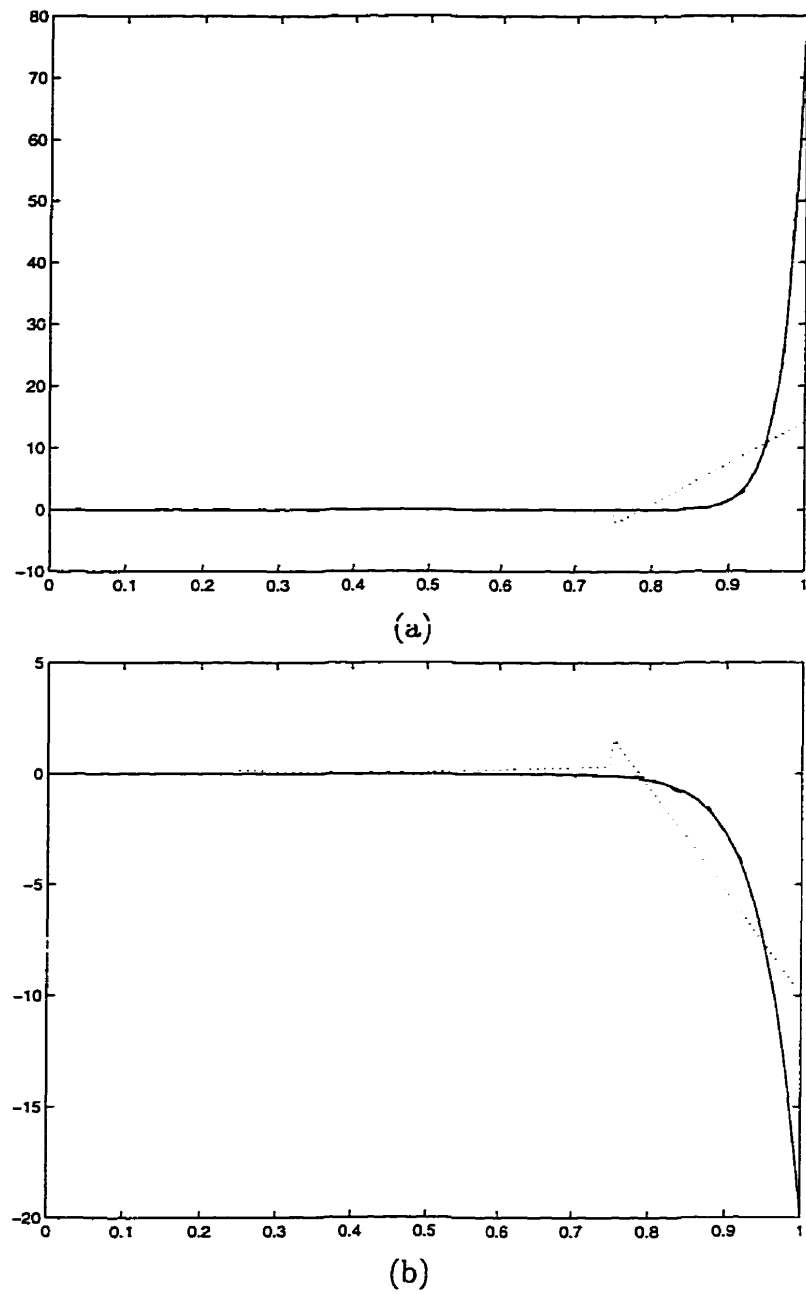


Figure 4.10 Problème de couche limite ($n = 20$): coupes en sortie des variables a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le premier (\cdots) et le dernier maillage ($---$) et la solution exacte (trait plein).

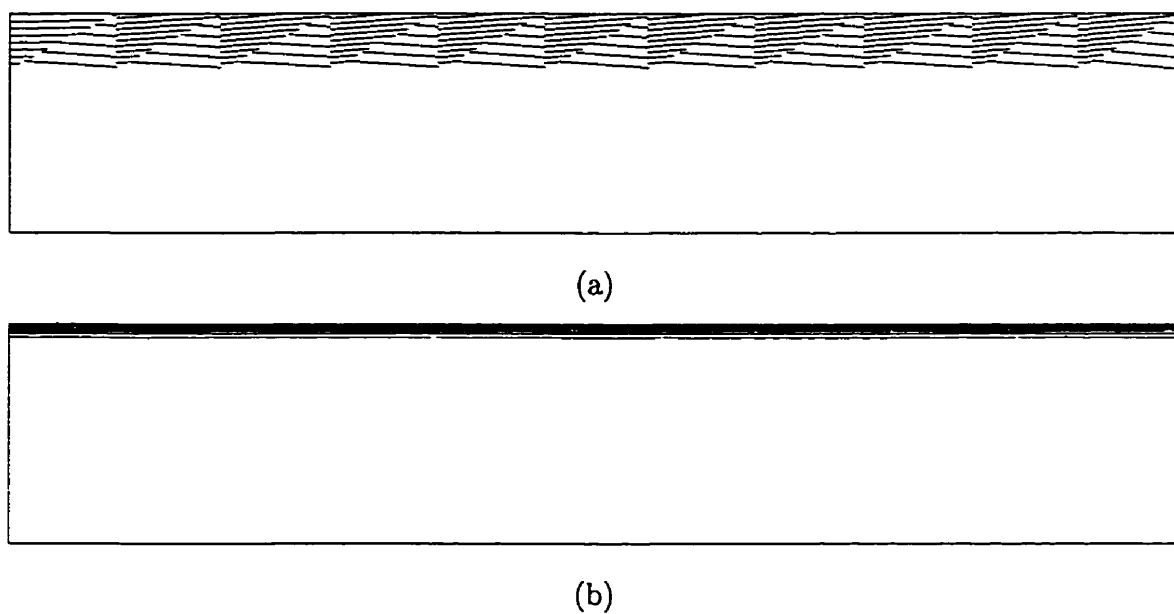


Figure 4.11 Problème de couche limite ($n = 20$): courbes de niveau de τ_{11} sur a) le premier et b) le dernier maillage.

Tableau 4.2 Problème de couche limite ($n = 20$): résultats de l'estimation d'erreur à chaque cycle adaptatif.

Cycle	# éléments	Erreur exacte $\ \tau - \tau_h\ _\Omega$	Erreur estimée $\ e_h\ _\Omega$	Efficacité θ	Erreur relative
0	88	12,524	4,27613	0,34143	0,32507
1	213	7,2046	4,00274	0,55558	0,21192
2	558	4,2262	1,36718	0,32350	0,066889
3	678	2,0458	1,09115	0,53336	0,051226
4	3674	0,36483	0,30923	0,84761	0,014316
5	4372	0,21582	0,18763	0,86941	0,008685
6	3816	0,21765	0,18786	0,86313	0,008695
7	3466	0,23660	0,19466	0,82277	0,009010
8	3190	0,24571	0,21245	0,86466	0,009834
9	3203	0,26112	0,21605	0,82742	0,010001

nous a permis d'obtenir une transition plus douce d'un maillage à l'autre, et par conséquent, d'avoir un maillage final mieux adapté. Cette façon de faire a d'ailleurs été conseillée par Dannelongue-Tanguy [7] et Hétu [13]. De même que dans le cas $n = 10$, l'objectif cible a été atteint à partir du sixième cycle. Par contre, on peut voir que le maillage du dixième cycle contient mille éléments de moins que ceux du sixième cycle. Le processus adaptatif semble encore une fois être assez fiable. Par le tableau 4.2, on remarque que l'indice d'efficacité des cinq derniers cycles est autour de 0,85. De plus, tout comme pour le cas où $n = 10$, les coupes en sortie (figure 4.9) et les courbes de niveau de τ_{11} (figure 4.11) démontrent bien que la solution obtenue sur le dernier maillage est une bonne approximation de la solution exacte. On peut constater que pour une même erreur relative visée, le dernier maillage obtenu ici contient trois fois plus d'éléments que celui obtenu pour le cas où $n = 10$.

4.2 Problème de la contraction 4:1

Dans cette section, nous étudions le problème de la contraction 4:1. La géométrie du domaine de calcul est représentée à la figure 4.12. Ce type de problème a été choisi pour évaluer les performances de notre stratégie adaptative car il possède une caractéristique intéressante. La solution a une singularité au point $(0, 1)$ du domaine, ce qui rend la résolution numérique de ce problème plus difficile. Le nombre de Weissenberg est défini ici par:

$$We = \lambda \dot{\gamma}_w$$

où $\dot{\gamma}_w$ est le taux de cisaillement à la paroi dans le canal de sortie. Les conditions aux limites qui sont imposées sont les suivantes (voir la figure 4.12):

- 1 : $\vec{u} = (0, 0)$;
- 2 : profil de vitesse en entrée;
- 3 : profil de vitesse en sortie;
- 4 : axe de symétrie.

Dans un premier temps, nous considérons à la sous-section 4.2.1 le cas newtonien, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 0$. Puis, nous traitons le cas viscoélastique à la sous-section 4.2.2, avec $\lambda = 1$ et $\epsilon = 0, 2$ dans le modèle de Phan-Thien-Tanner.

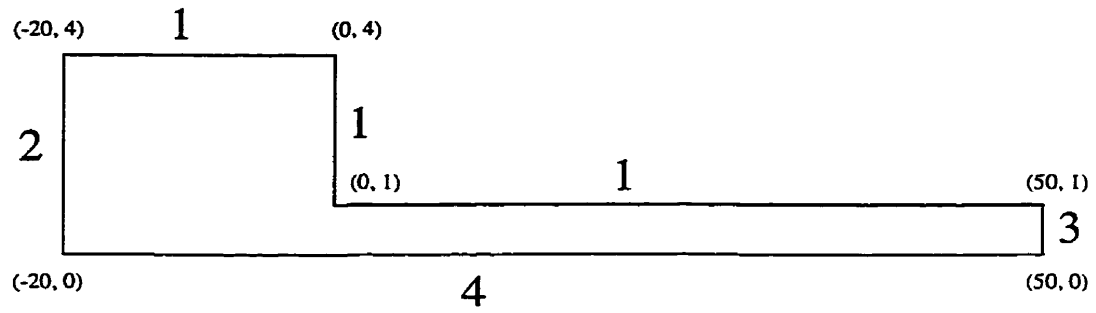


Figure 4.12 Domaine de calcul pour le problème de la contraction 4:1.

4.2.1 Cas newtonien

Bien que notre estimateur d'erreur ait été développé principalement pour la résolution de problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques, nous avons voulu voir s'il était aussi valable pour le traitement de problèmes avec un fluide newtonien, à savoir lorsque $\lambda = 0$. Le problème de la contraction 4:1 nous semble être un bon test pour valider notre estimation d'erreur dans ce cas.

Rappelons que lorsque $\lambda = 0$, la loi de comportement du fluide est réduite à la forme suivante:

$$\tau = 2\eta_v \dot{\gamma}(\vec{u})$$

La formulation variationnelle discrète associée à cette équation, au niveau élémen-

taire, est donnée par:

$$\int_K \tau_h : \phi_h \, d\vec{x} = \int_K 2\eta_v \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \phi_h \, d\vec{x} \quad \forall \phi_h \in [P_1(K)]_s^{2 \times 2} \quad (4.4)$$

où $P_1(K)$ est l'ensemble des polynômes linéaires définis sur l'élément K . En fait, on peut voir par l'expression (4.4) que τ_h est une projection de $2\eta_v \dot{\gamma}(\vec{u})$ dans l'espace discret Σ_h . L'estimateur d'erreur e_h sur l'élément K est alors obtenu par la résolution du problème suivant:

♦ trouver $e_h \in P_2(K)$ tel que:

$$\int_K e_h : \phi_h \, d\vec{x} = - \int_K \tau_h : \phi_h \, d\vec{x} + \int_K 2\eta_v \dot{\gamma}(\vec{u}_h) : \phi_h \, d\vec{x} \quad \forall \phi_h \in [P_2(K)]_s^{2 \times 2} \quad (4.5)$$

où $P_2(K)$ est l'ensemble des polynômes quadratiques définis sur l'élément K . On remarque que le gradient du tenseur des extra-contraintes n'est pas présent dans la formulation (4.5), ce qui implique que la méthode de Lesaint-Raviart n'est pas utilisée dans la résolution de ce problème. Ainsi, l'estimation d'erreur dans ce cas-ci est de type problèmes locaux, puisque ces problèmes élémentaires ne sont pas liés entre eux par les termes de bord.

Le problème est résolu pour un objectif de 0,1% d'erreur relative. Cette cible est atteinte en sept cycles adaptatifs. Encore une fois, l'erreur relative cible n'a pas été fixée à 0,1% directement, mais plutôt de façon progressive, c'est-à-dire à

Tableau 4.3 Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): erreur relative estimée.

Cycle	# éléments	Erreur relative cible	Erreur relative estimée
0	432	1%	0,023724
1	822	0,5%	0,010331
2	1132	0,25%	0,004042
3	1457	0,1%	0,001939
4	2010	0,1%	0,001271
5	1646	0,1%	0,001122
6	1613	0,1%	0,001145
7	1541	0,1%	0,001073

1% pour le premier cycle, 0,5% pour le deuxième cycle, 0,25% pour le troisième cycle et 0,1% pour les cycles suivants. Au tableau 4.3, on observe que le processus adaptatif réussit bien à atteindre l'objectif de 1% d'erreur relative. On présente à la figure 4.13 le premier et le dernier maillage. Notons que nous avons fixé des tailles élémentaires minimum et maximum à 0,001 et 1 respectivement, afin de ne pas raffiner le maillage indéfiniment près de la singularité. On remarque que sur le dernier maillage, les éléments sont très petits près du coin de la singularité, et que partout ailleurs dans le domaine, les tailles élémentaires sont plus grandes. Pour ce qui est des courbes de niveau des champs \vec{u}_h et τ_h (voir les figures 4.14 et 4.15), on peut voir que la solution ressemble aux résultats classiques déjà obtenus [6]. Notons cependant que les oscillations apparentes sur les courbes de niveau du champ de vitesse \vec{u}_h sont seulement un effet du visualisateur que nous avons utilisé. Sur les coupes de \vec{u}_h et τ_h le long de l'axe de symétrie (en $y = 0$) et de l'axe de la singularité (en $y = 1$), présentées aux figures 4.16 et 4.18, on ne remarque aucune oscillation.



(a)

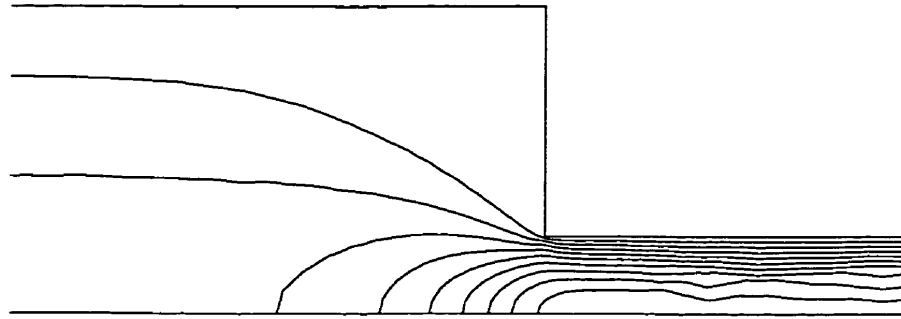


(b)

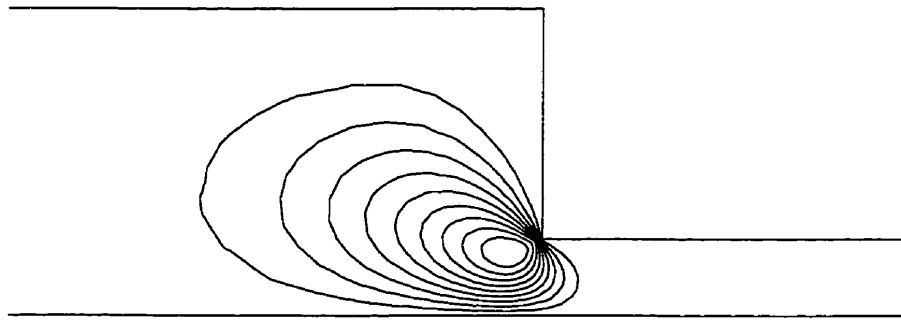


(c)

Figure 4.13 Problème de la contraction 4 : 1 (cas newtonien): a) premier et b) c) dernier maillage.



(a)



(b)

Figure 4.14 Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): courbes de niveau de a) u_1 et b) u_2 sur le dernier maillage.

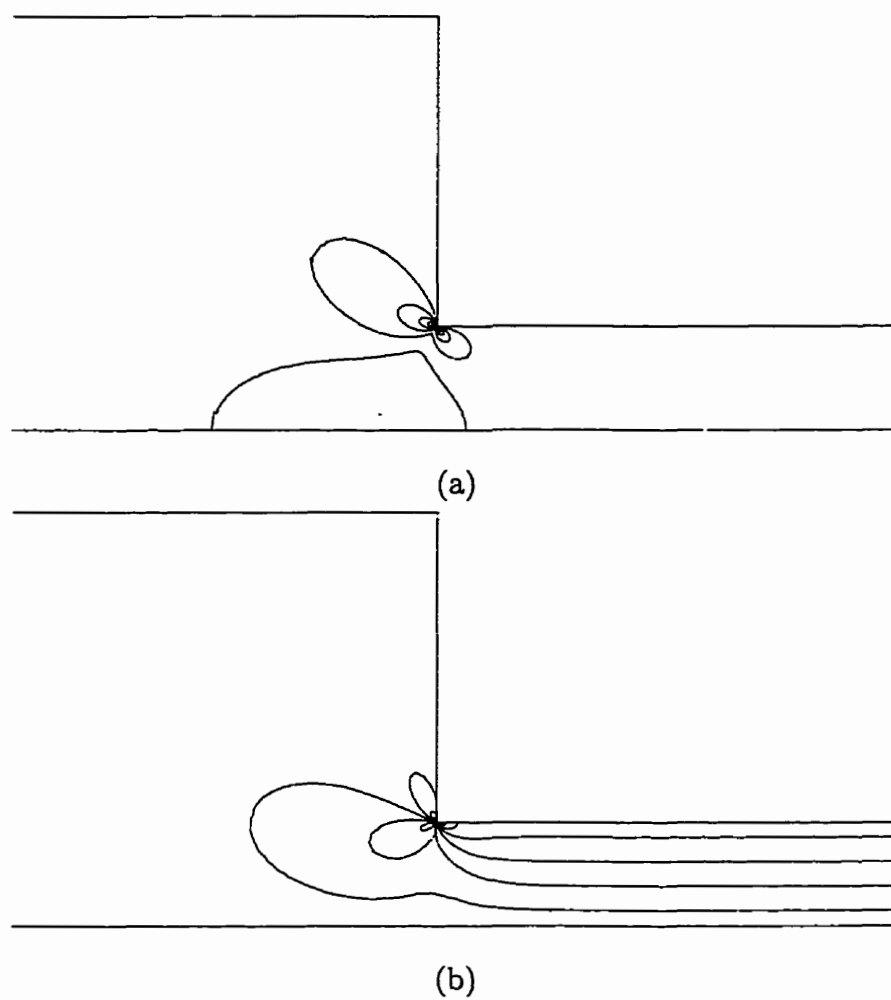


Figure 4.15 Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): courbes de niveau de a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le dernier maillage.

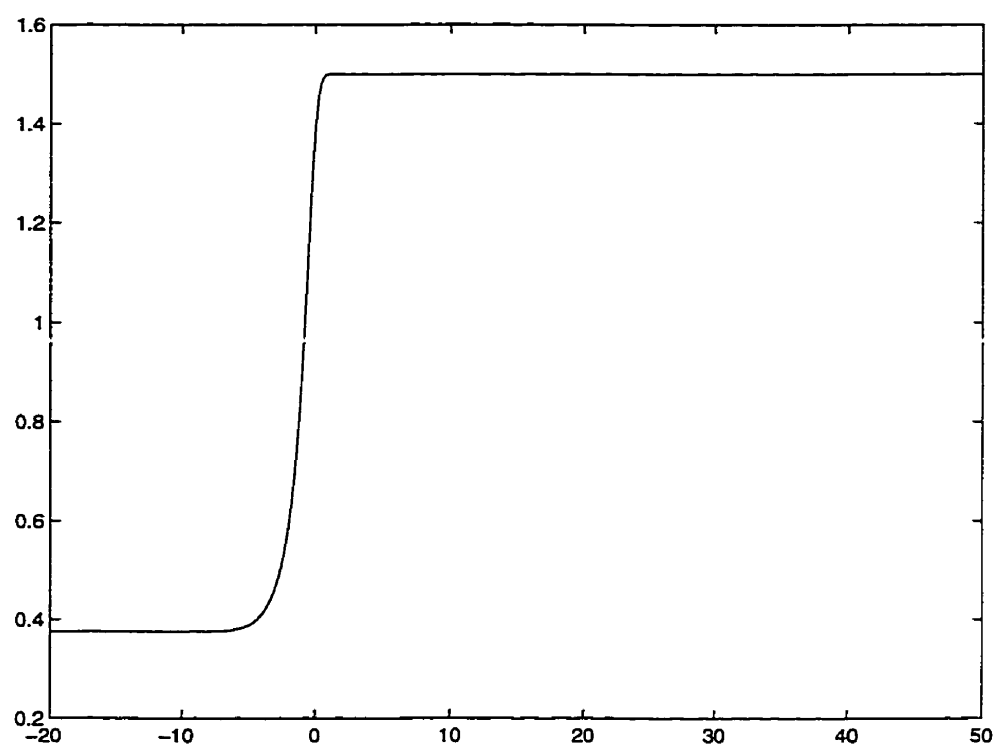


Figure 4.16 Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupe de u_1 en $y = 0$ sur le dernier maillage.

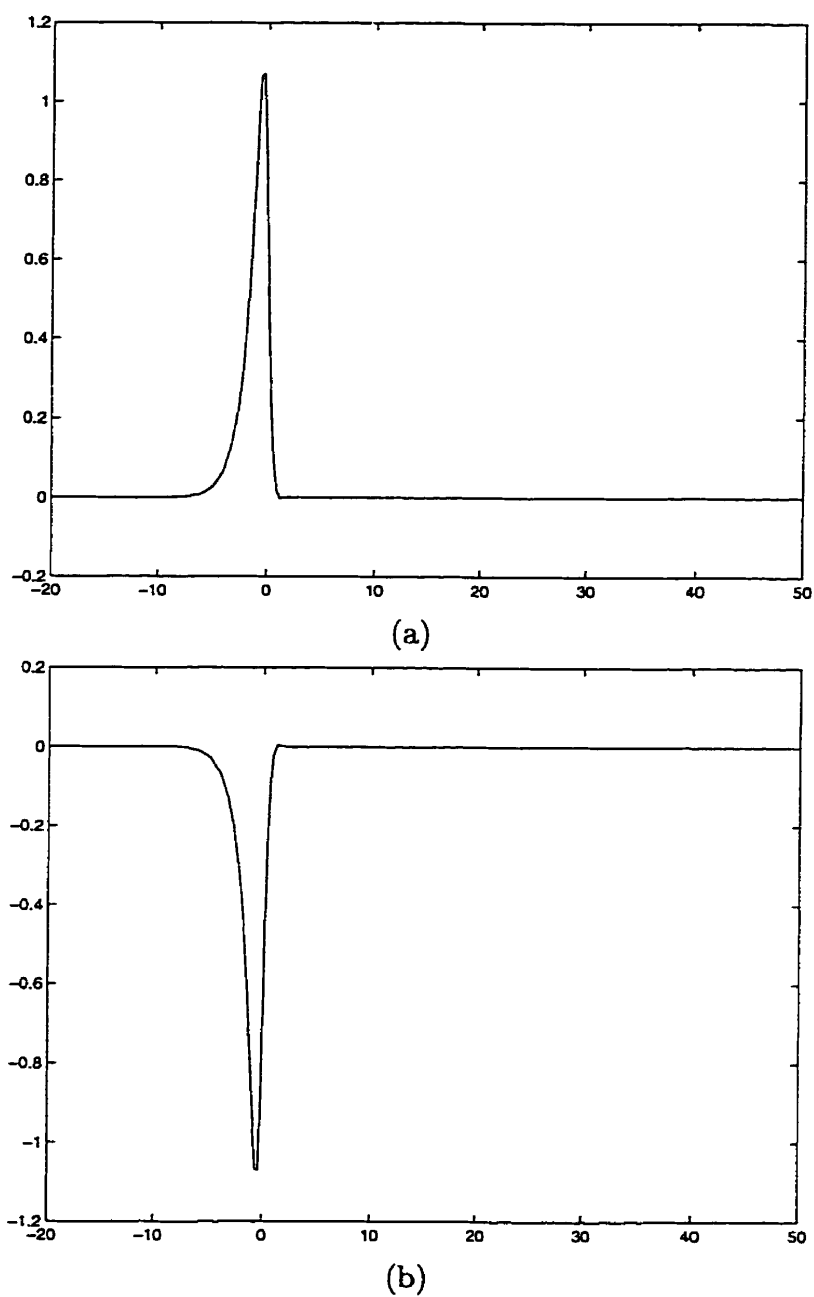


Figure 4.17 Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{22} en $y = 0$ sur le dernier maillage.

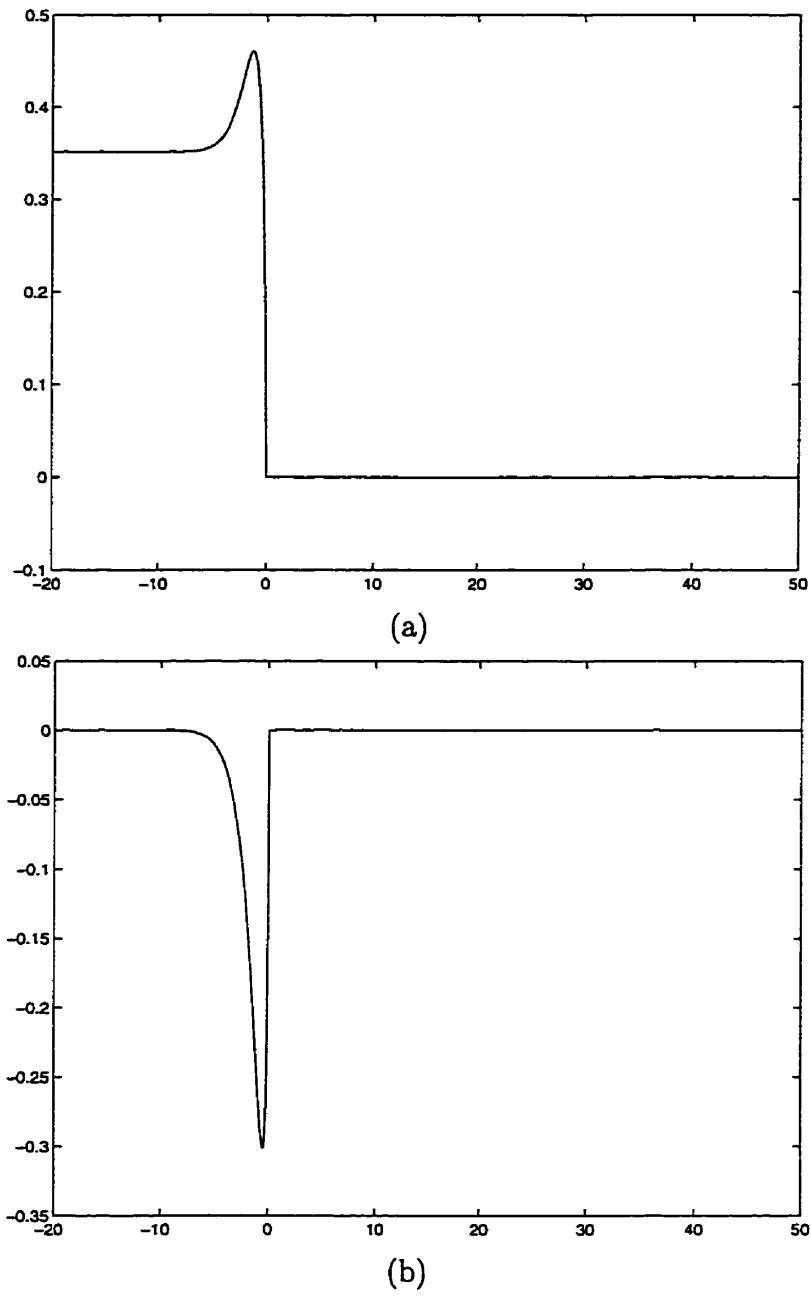


Figure 4.18 Problème de la contraction 4 : 1 (cas newtonien): coupes de a) u_1 et b) u_2 en $y = 1$ sur le dernier maillage.

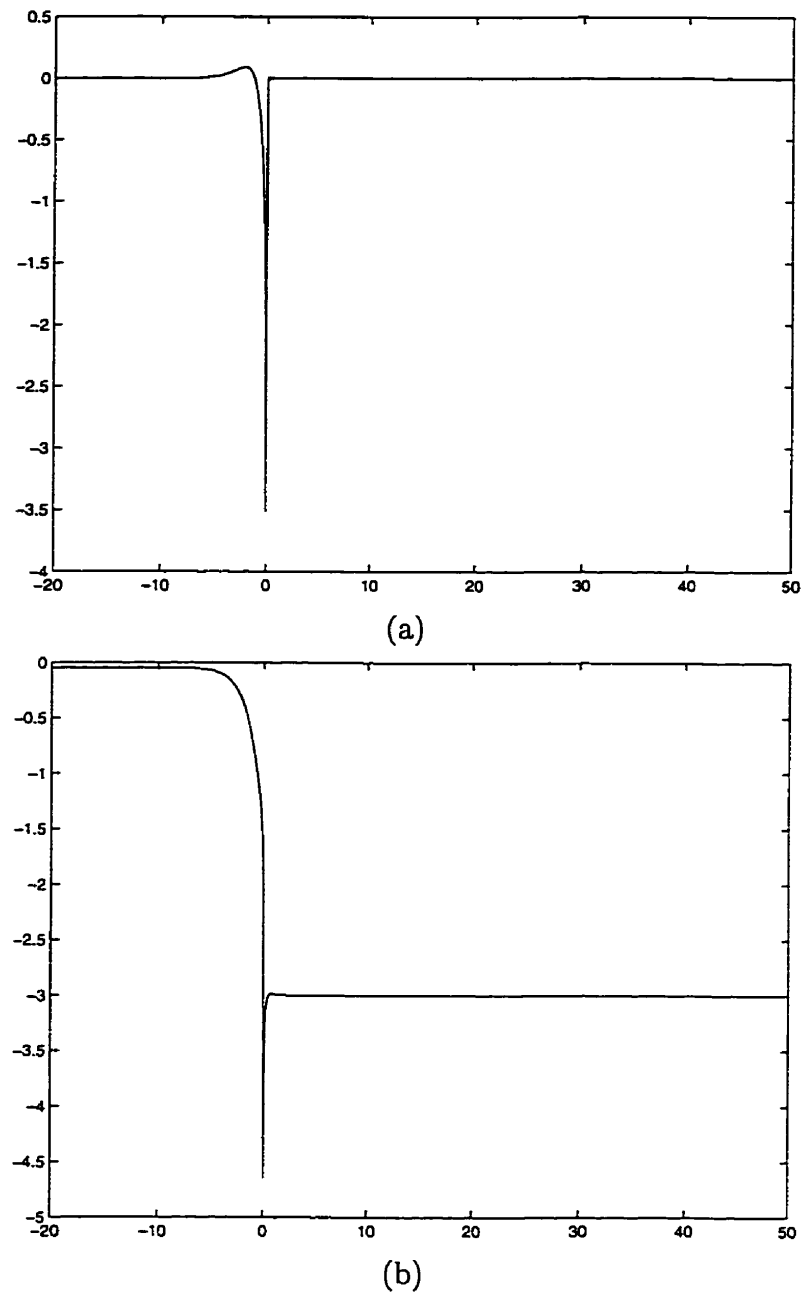


Figure 4.19 Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{12} en $y = 1$ sur le dernier maillage.

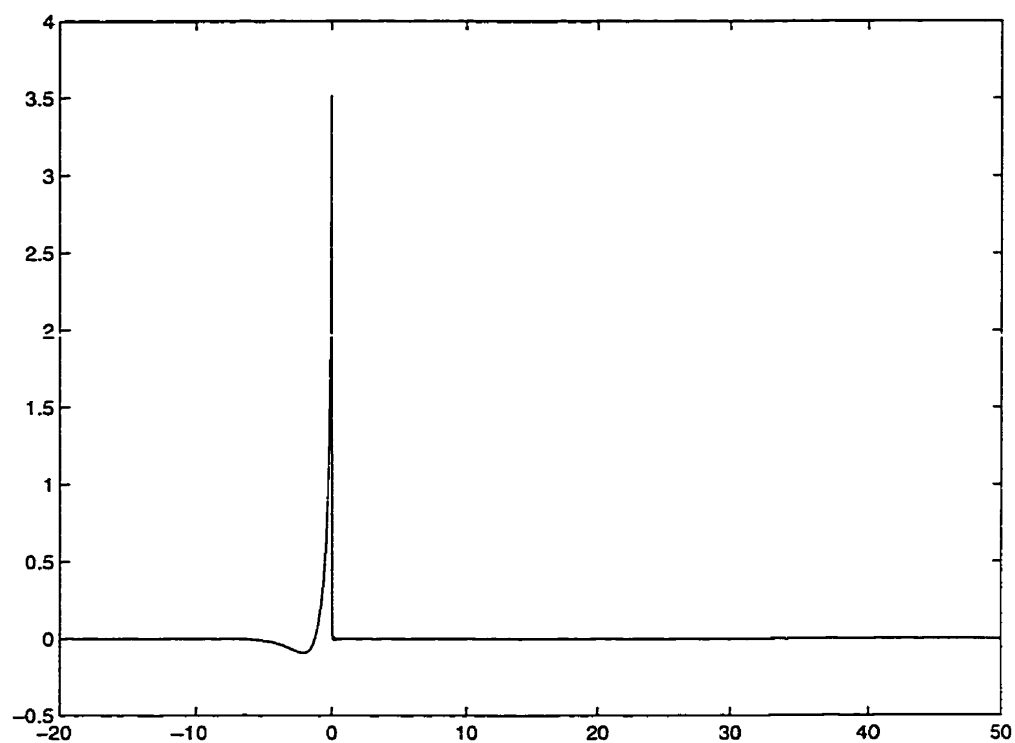


Figure 4.20 Problème de la contraction 4:1 (cas newtonien): coupe de τ_{22} en $y = 1$ sur le dernier maillage.

4.2.2 Cas viscoélastique

Nous considérons maintenant le problème de la contraction 4 : 1 avec un fluide viscoélastique où $\lambda = 1$ et $\epsilon = 0,2$. Dans les résultats qui suivent, le nombre de Weissenberg est de 3,84. Pour avoir une erreur relative de 1%, nous avons effectué quatre cycles adaptatifs. On remarque que l'erreur relative estimée est autour 0,74% pour les derniers cycles adaptatifs, ce qui est un peu en-dessous de l'objectif de 1%.

Nous avons fixé les tailles d'éléments minimale et maximale à 0,01 et 1 respectivement. La taille minimale est plus grande que dans le cas newtonien afin d'éviter les problèmes de convergence au niveau de la résolution numérique, causés par des éléments trop petits près du coin de la singularité. À la figure 4.21, on présente le maillage initial et le maillage du dernier cycle. Tout comme dans le cas newtonien, le maillage final est raffiné près du coin de la singularité. On remarque de plus que le maillage est plus fin dans le canal de sortie que dans le cas newtonien. Ceci est dû au fait que τ_{11} , τ_{12} et τ_{22} ne sont plus linéaires dans cette région. Donc, il doit y avoir plus que deux couches d'éléments pour bien approcher la solution. Mais lorsque $\lambda = 0$, τ_{12} est linéaire, τ_{11} et τ_{22} sont nuls dans le canal de sortie; la solution exacte peut donc être captée avec seulement deux couches d'éléments.

Les courbes de niveau des variables \vec{u}_h et τ_h sont présentées aux figures 4.22 et 4.23. La solution obtenue est semblable aux résultats classiques connues pour

Tableau 4.4 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): erreur relative estimée.

Cycle	# éléments	Erreur relative cible	Erreur relative estimée
0	432	1%	0,058796
1	2534	1%	0,014443
2	2881	1%	0,007486
3	2038	1%	0,007455
4	1690	1%	0,007441

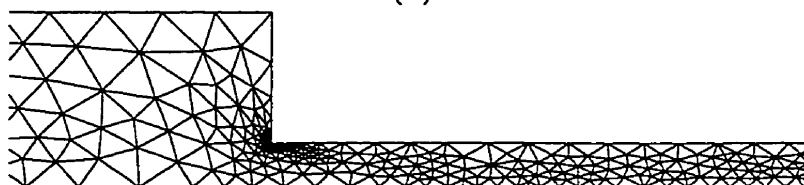
ce problème [6, 12]. Toutefois, les coupes de \vec{u}_h et τ_h le long de l'axe de symétrie (en $y = 0$) et de l'axe de la singularité (en $y = 1$) (voir les figures 4.24 et 4.26), nous montre que de petites oscillations sont présentes dans le canal de sortie. Les oscillations sur τ_h sont dues à la résolution par la méthode de Lesaint-Raviart sur un maillage mal orienté, tel que nous l'avons expliqué à la section 4.1.1. En fait, en regardant le maillage final, on constate que, malgré le traitement fait pour orienter le maillage, les éléments dans le canal de sortie ne sont pas tous alignés dans le sens de l'écoulement. De plus, on observe également des oscillations sur le champ \vec{u}_h (voir la figure 4.24) dues au couplage avec le tenseur τ_h qui est oscillant. Rappelons que dans le cas newtonien, il n'y a pas d'oscillations puisque la méthode de Lesaint-Raviart n'intervient pas dans la résolution de la loi de comportement du fluide.



(a)



(b)



(c)

Figure 4.21 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): a) premier et b) c) dernier maillage.

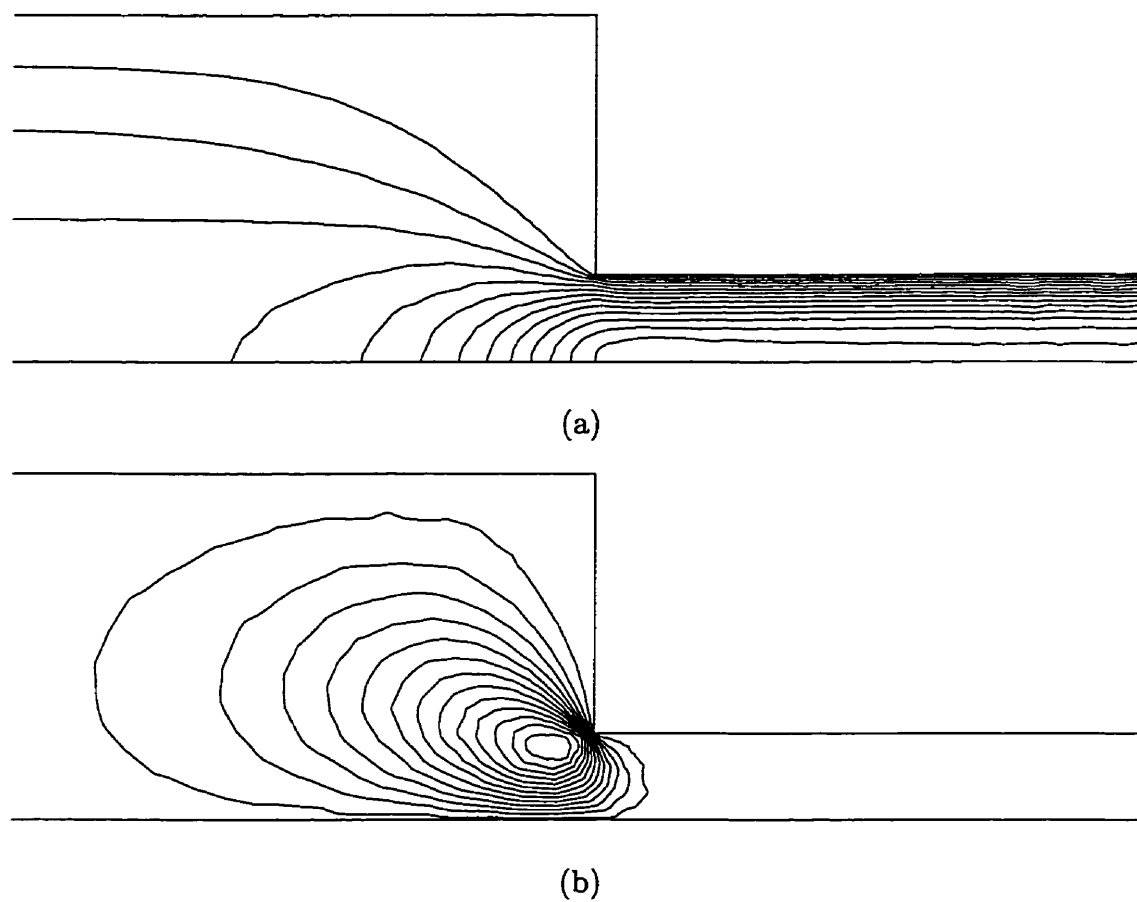


Figure 4.22 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): courbes de niveau de a) u_1 et b) u_2 sur le dernier maillage.

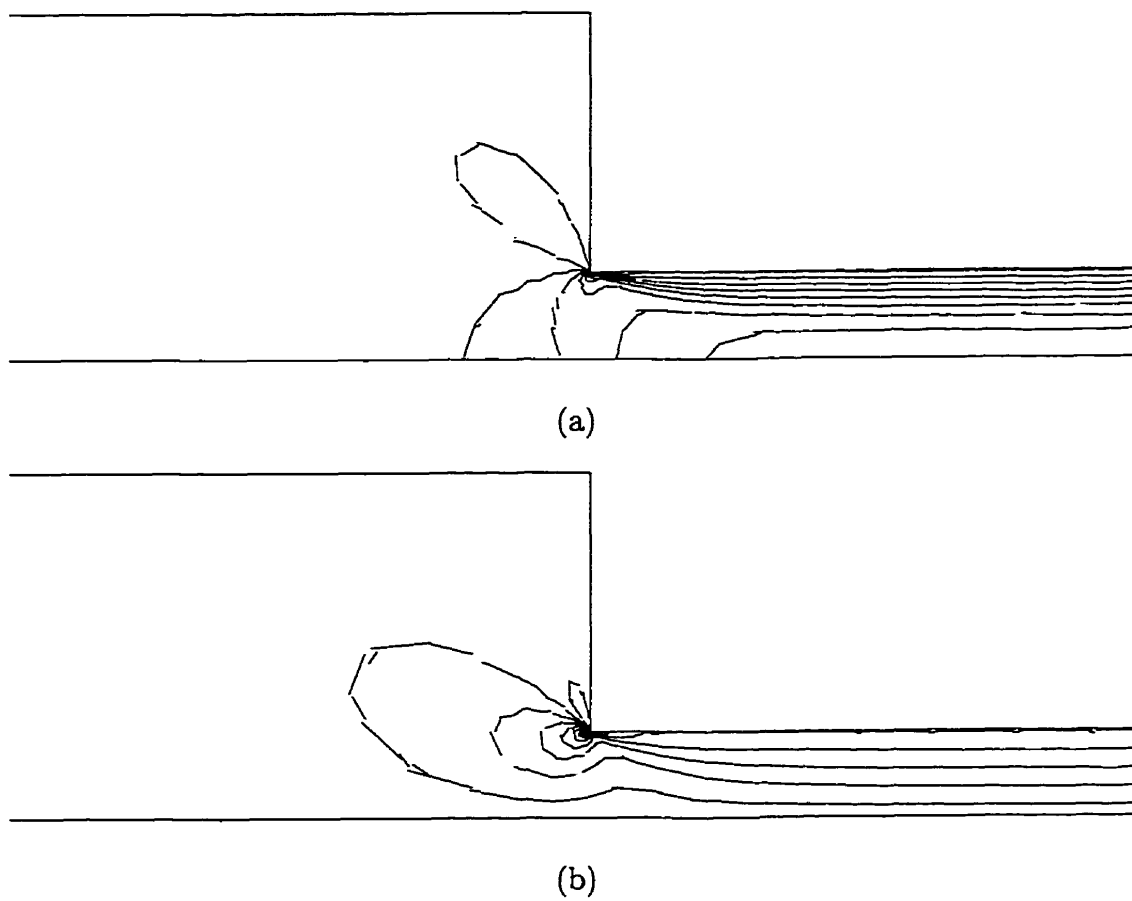


Figure 4.23 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0,2$): courbes de niveau de a) τ_{11} et b) τ_{12} sur le dernier maillage.

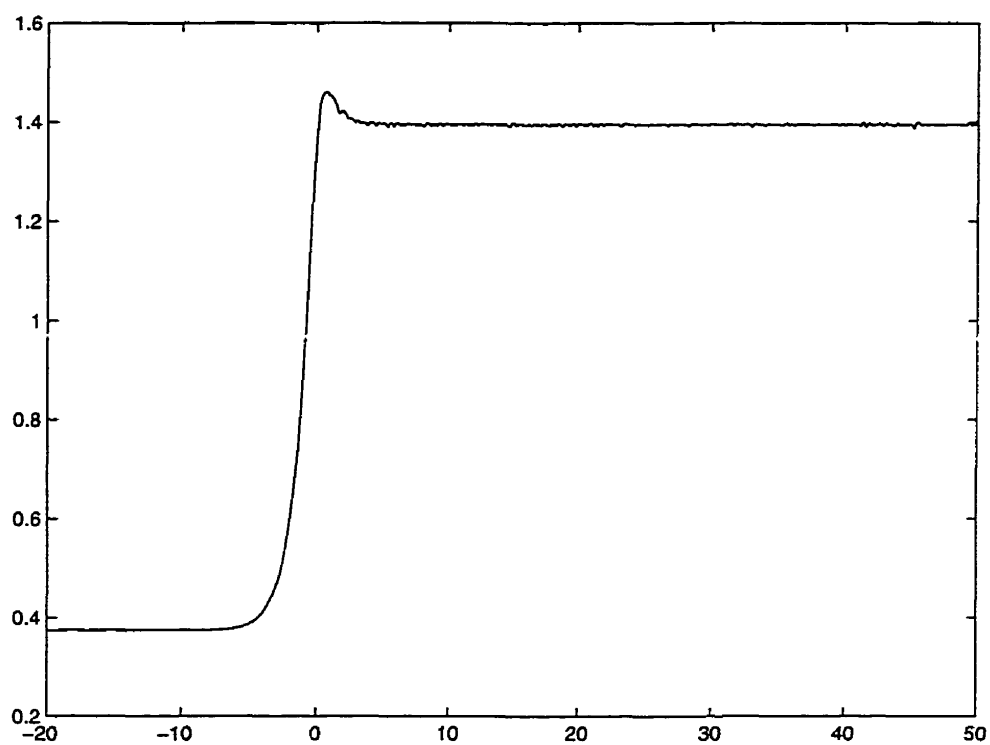


Figure 4.24 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupe de u_1 , τ_{11} et τ_{22} en $y = 0$ sur le dernier maillage.

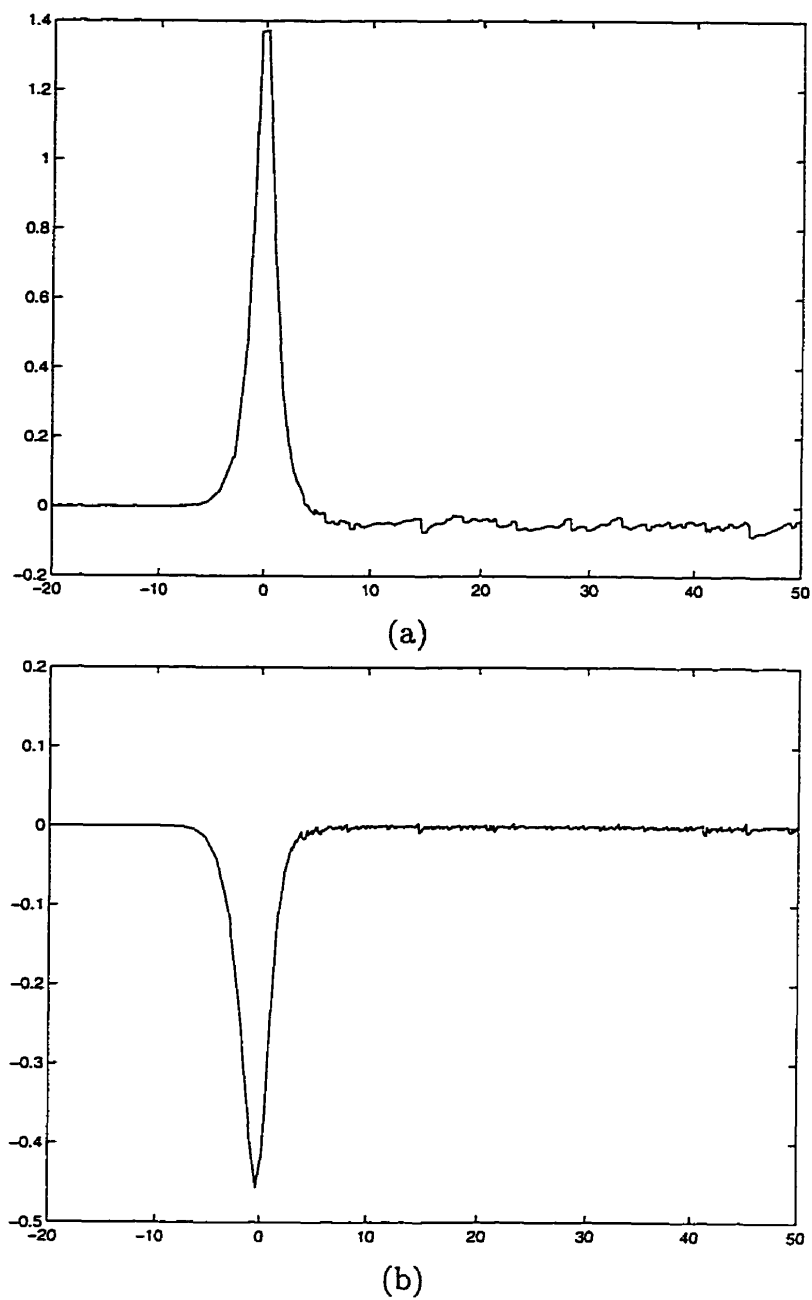


Figure 4.25 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{22} en $y = 0$ sur le dernier maillage.

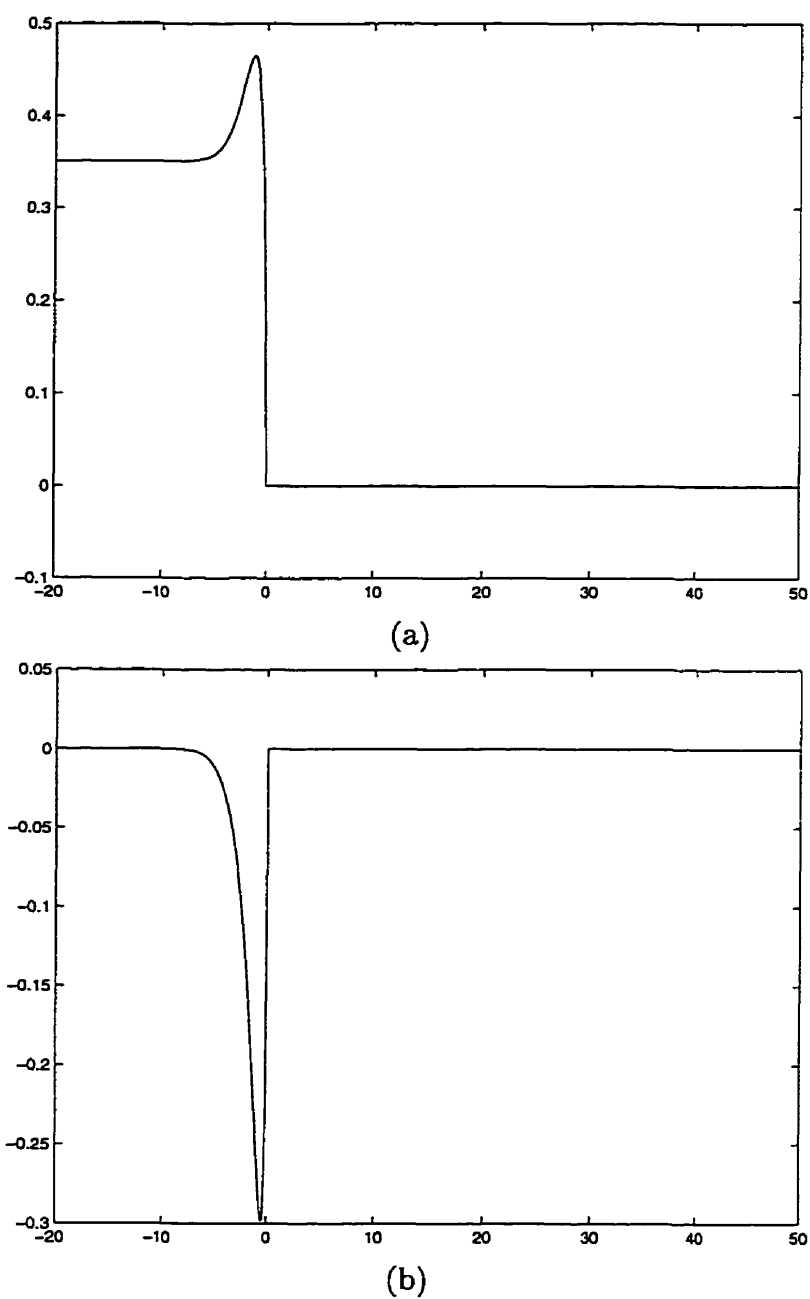


Figure 4.26 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupes de a) u_1 et b) u_2 en $y = 1$ sur le dernier maillage.

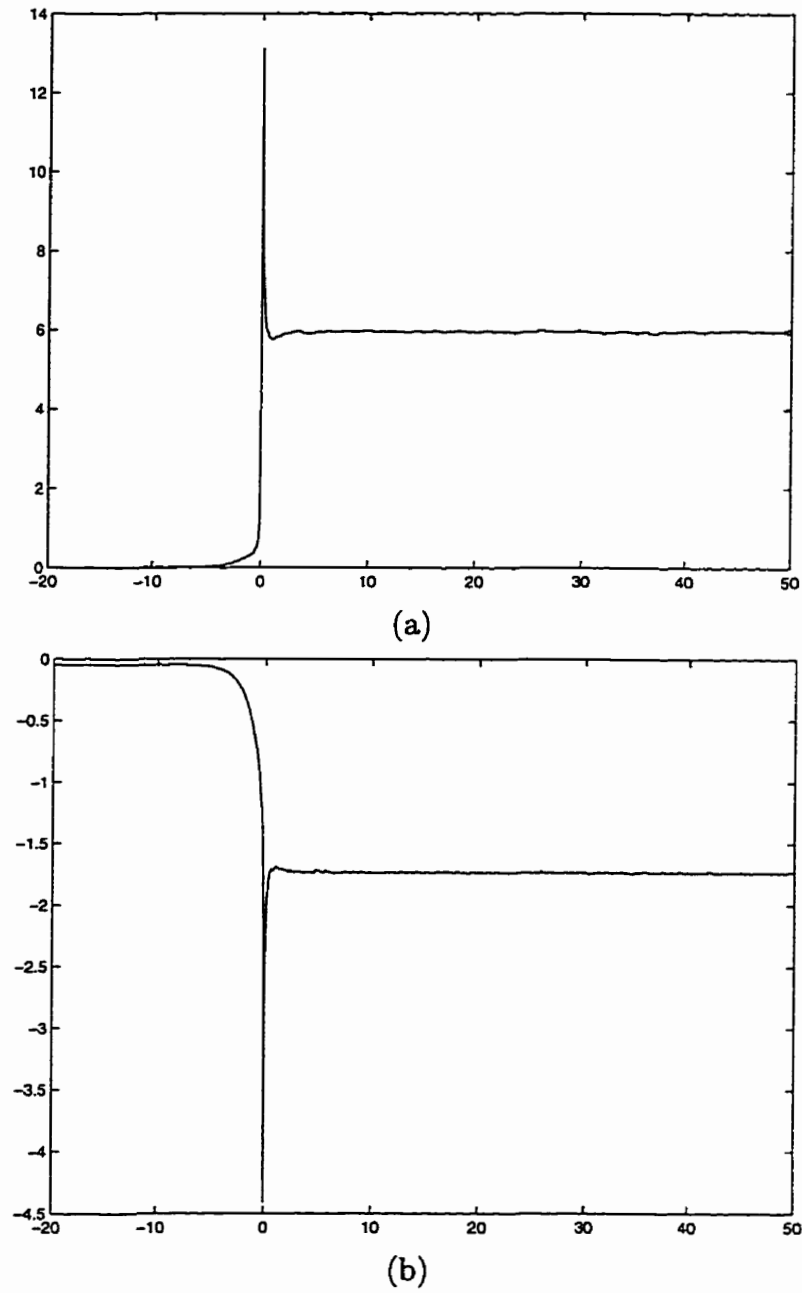


Figure 4.27 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupes de a) τ_{11} et b) τ_{12} en $y = 1$ sur le dernier maillage.

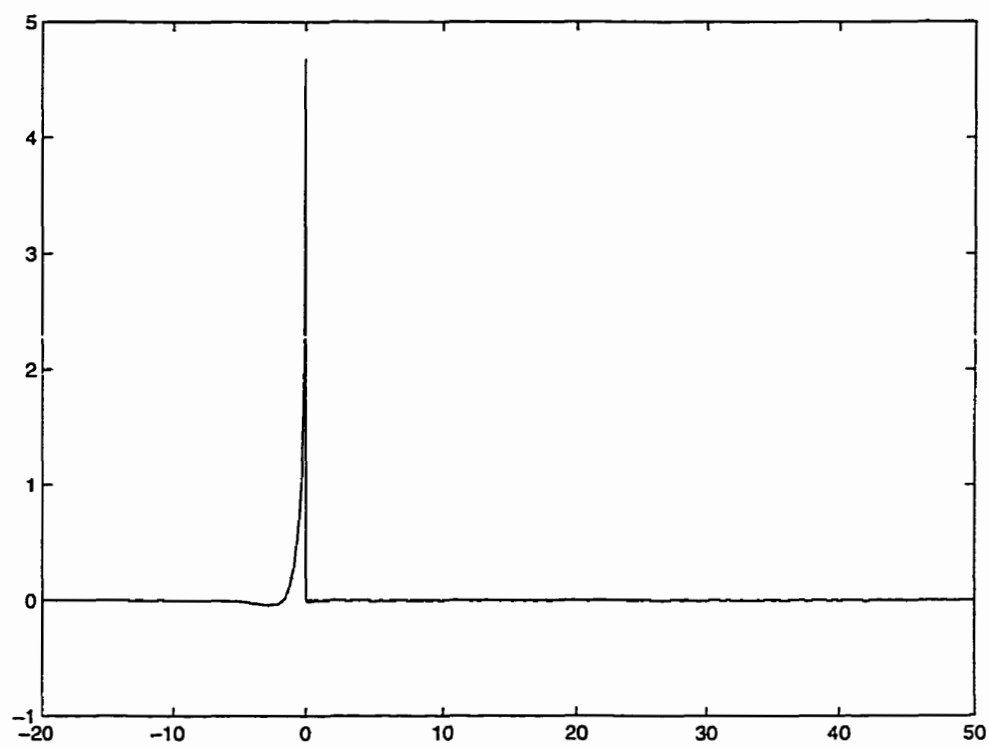


Figure 4.28 Problème de la contraction 4:1 ($\lambda = 1, \epsilon = 0, 2$): coupe de τ_{22} en $y = 1$ sur le dernier maillage.

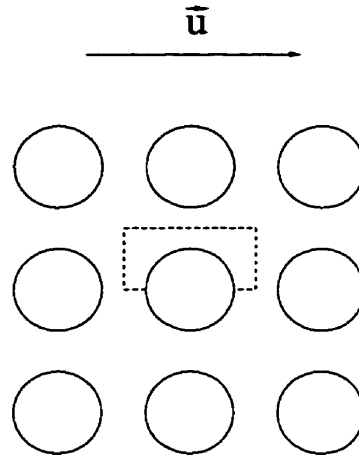


Figure 4.29 Géométrie du problème d'écoulement périodique autour d'une rangée de cylindres.

4.3 Écoulement périodique autour d'un cylindre

Le dernier test que nous faisons passer à notre procédure adaptative est un problème d'écoulement autour une rangée infinie de cylindres, représentée par la figure 4.29. Afin de résoudre ce problème, nous considérons seulement la partie restreinte de la géométrie présentée à la figure 4.30, où l'on impose des conditions de périodicité à l'entrée et à la sortie du domaine de calcul. Ainsi, les conditions aux limites imposées sont les suivantes (voir la figure 4.30):

- 1 : $\vec{u} = (0, 0)$
- 2 : condition de périodicité
- 3 : axe de symétrie

Pour plus de détails sur ce problème, voir les références [16, 26, 27].

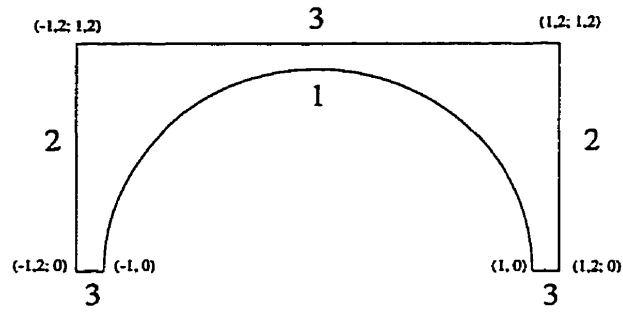


Figure 4.30 Domaine de calcul pour le problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre.

À l'entrée, on ne connaît pas *a priori* la valeur du champ de vitesse \vec{u} . Un débit Q est donc imposé, c'est-à-dire:

$$Q = \int_{\Gamma} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$$

De même, puisqu'on ne connaît pas la valeur du tenseur τ à l'entrée, on doit exécuter plusieurs balayages avec la méthode de Lesaint-Raviart afin d'obtenir une solution convergée pour τ_h . Ceci a pour conséquence de rendre le traitement numérique plus difficile. Pour ce problème, le nombre de Weissenberg est défini par:

$$We = \frac{\lambda Q}{d^2}$$

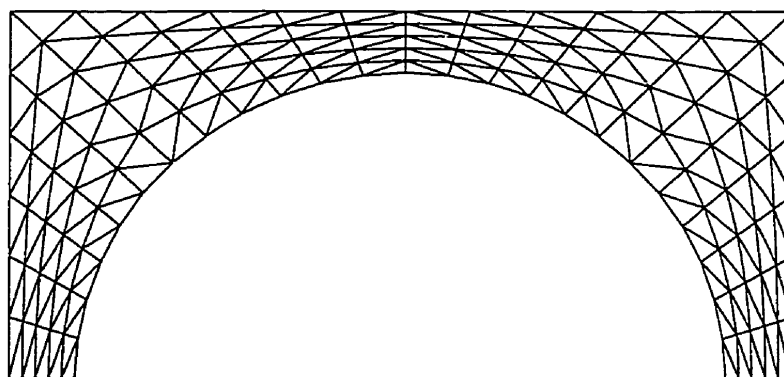
où d est la distance entre le cylindre et la frontière périodique (ici $d = 0, 2$). De plus, nous fixons $\lambda = 0, 1$, $\epsilon = 0$ et $Q = 1$. Donc, le nombre de Weissenberg est $We = 2, 5$.

Tableau 4.5 Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: erreur relative estimée.

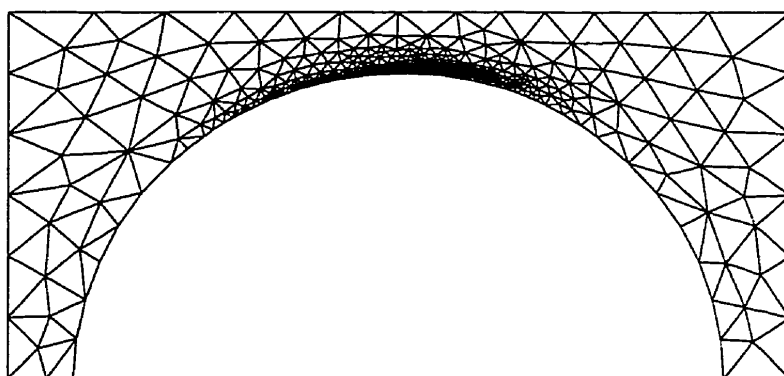
Cycle	# éléments	Erreur relative cible	Erreur relative estimée
0	240	10%	0,193925
1	306	5%	0,106252
2	708	5%	0,094047
3	858	5%	0,043974

Nous avons effectué trois cycles adaptatifs pour atteindre une erreur relative d'environ 5%. L'objectif d'erreur relative est de 10% pour le premier cycle et de 5% pour les cycles suivants. À la figure 4.31, nous présentons le maillage initial et le maillage du dernier cycle. On peut voir que le maillage final semble être bien adapté au problème. En effet, près de la partie supérieure de la paroi du cylindre, les éléments sont de très petites tailles, alors que partout ailleurs dans le domaine les tailles élémentaires sont du même ordre de grandeur que celles du maillage initial. On observe sur les courbes de niveau des champs \vec{u}_h et τ_h , présentées aux figures 4.32 et 4.33, que la solution obtenue au dernier cycle paraît raisonnable, mais semble toutefois manquer un peu de précision (voir la figure 4.32). Ceci peut s'expliquer par le fait que l'erreur relative est autour de 5%, ce qui n'est peut être pas suffisant comme précision pour ce problème. De plus, au dernier cycle adaptatif, nous avons eu des problèmes de convergence avec la méthode GMRES, que nous avons contournés en relaxant un peu le critère d'arrêt. En observant de plus près le dernier maillage, nous avons remarqué que certains éléments près de la partie supérieure du cylindre étaient très étirés, ce qui pourrait expliquer les problèmes de convergence survenus

dans la résolution numérique. Malgré cela, les résultats obtenus sont comparables à ceux présentés dans [26] pour un maillage de quadrilatères composé d'environ 1200 éléments.

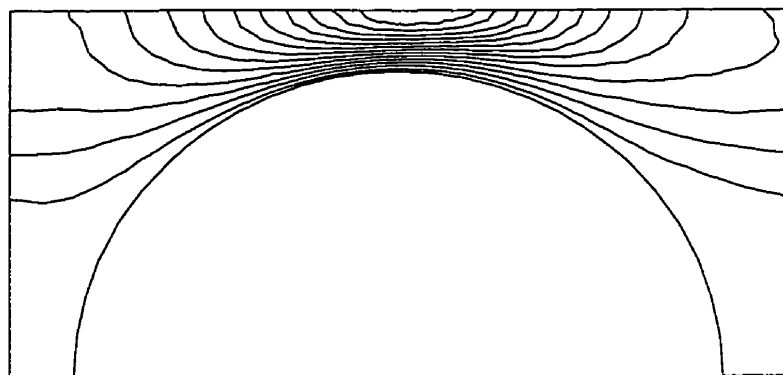


(a)

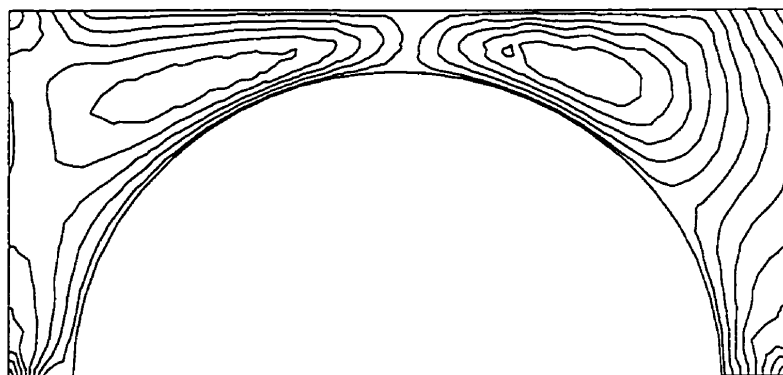


(b)

Figure 4.31 Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: a) premier et b) dernier maillage.

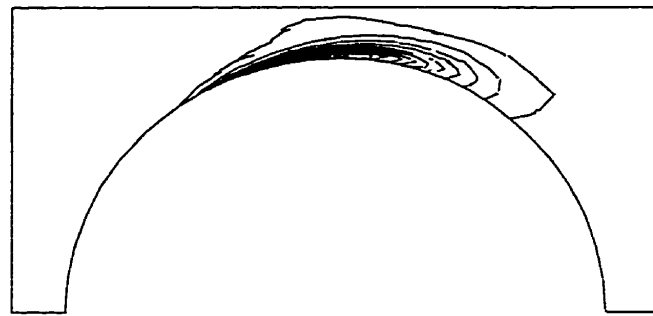


(a)

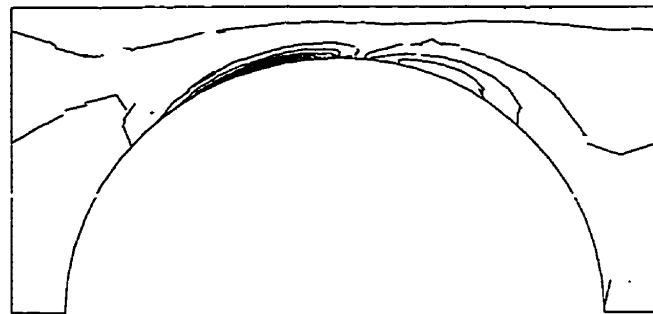


(b)

Figure 4.32 Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: courbes de niveau de a) u_1 et b) u_2 sur le dernier maillage.



(a)



(b)



(c)

Figure 4.33 Problème d'écoulement périodique autour d'un cylindre: courbes de niveau de a) τ_{11} , b) τ_{12} et c) τ_{22} sur le dernier maillage.

Conclusion

La principale contribution apportée par ce mémoire est l'élaboration d'une méthode d'éléments finis adaptative appropriée pour la résolution de problèmes d'écoulements de fluides viscoélastiques. Cette méthode semble être assez efficace puisqu'elle a fourni de bons résultats pour un certain nombre de problèmes tests. En effet, pour chaque problème test traité, notre stratégie adaptative nous a permis d'obtenir une solution ayant la précision désirée, et ce sur un maillage qui semble être quasi-optimal. Quant à l'estimateur d'erreur proposé dans ce travail, nous avons montré qu'il approche l'erreur exacte de façon satisfaisante. De plus, cet estimateur d'erreur est peu coûteux en terme de temps de calcul et d'espace mémoire nécessaire. Notons également qu'un tel estimateur d'erreur peut être implémenté facilement dans un code d'éléments finis déjà existant, même si la méthode de Lesaint-Raviart n'est pas utilisée pour la résolution de la loi de comportement. On peut très bien obtenir la solution du tenseur des extra-contraintes par une méthode SUPG ou SU, et calculer l'estimateur d'erreur avec la méthode de Lesaint-Raviart.

Ce travail apporte une autre contribution; c'est l'observation faite de l'effet de la méthode de Lesaint-Raviart sur des maillages triangulaires non structurés. Cet effet a été vérifié seulement pour des simulations d'écoulements de fluides viscoélastiques.

À notre connaissance, ce phénomène n'est mentionné nul part dans la littérature. Rappelons que ce phénomène semble être causé par une mauvaise orientation des éléments par rapport au sens de l'écoulement. Cependant, nous n'avons pas jusqu'à maintenant d'explication théorique de cet effet. Afin d'atténuer les oscillations sur les solutions obtenues, nous avons implémenté, dans le générateur de maillage utilisé, un algorithme permettant d'aligner autant que possible un côté de chaque élément du maillage avec le champ de vitesse.

Malgré cette stratégie d'orientation du maillage dans le sens de l'écoulement, plusieurs éléments restent mal orientés par rapport au champ de vitesse. De plus cette approche génère parfois des éléments trop étirés dans des endroits critiques du domaine, ce qui peut causer des difficultés lors de la résolution numérique. Dans de futurs travaux, il serait intéressant d'utiliser un autre générateur de maillage peut être mieux adapté pour ce traitement, afin de voir s'il est possible d'éliminer les oscillations observées sur la solution.

Une autre constatation que nous avons faite est l'effet de l'adaptativité sur la convergence du schéma numérique pour les grands nombres de Weissenberg. Bien que notre procédure adaptative nous permette de capter la solution de manière précise dans les zones de fortes variations du tenseur des extra-contraintes, il reste que le nombre critique de Weissenberg n'est pas augmenté pour autant. De plus, comme

cela fut observé auparavant, plus le maillage est fin dans les zones de fortes variations des extra-contraintes, plus la résolution numérique est difficile.

Finalement, ce travail soulève des questions pouvant donner lieu à de futurs recherches sur les méthodes adaptatives pour les simulations d'écoulements de fluides viscoélastiques, comme par exemple l'utilisation d'un autre type estimateur d'erreur pour des fins de comparaisons.

Références

- [1] AINSWORTH, M. et ODEN, J.T. (1997). A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142, 1–88.
- [2] AINSWORTH, M., ZHU, J.Z., CRAIG, A.W. et ZIENKIEWICZ, O.C. (1989). Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2161–2174.
- [3] BAAIJENS, F.P.T. (1994). Application of low-order Discontinuous Galerkin methods to the analysis of viscoelastic flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 52, 37–57.
- [4] BAAIJENS, F.P.T. (1998). An iterative solver for the DEVSS/DG method with application to smooth and non-smooth flows of the upper convected Maxwell fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 75, 119–138.
- [5] BANK, R.E et WELFERT, B.D. (1991). A posteriori error estimates for the Stokes problem. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 28, 591–623.
- [6] CHAPLEAU, S. (1995). *Formulations mixtes stabilisées pour les écoulements viscoélastiques*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

- [7] DANNELONGUE, H.H et TANGUY, P.A. (1990). An adaptive remeshing technique for non-newtonian fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, 1555–1567.
- [8] FORTIN, A. et FORTIN, M. (1990). A preconditioned Generalized Minimal Residual algorithm for the numerical solution of viscoelastic fluid flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 36, 277–288.
- [9] FORTIN, A., ZINE, A. et AGASSANT, J.F. (1992). Computing viscoelastic fluid flow problems at low cost. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 45, 209–229.
- [10] FORTIN, M. et FORTIN, A. (1985). A generalization of Uzawa's algorithm for the solution of the Navier-Stokes equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1, 205–208.
- [11] FORTIN, M. et FORTIN, A. (1985). Experiments with several elements for viscous incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 5, 911–928.
- [12] GUÉNETTE, R. et FORTIN, M. (1995). A new finite element method for computing viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 60, 27–52.
- [13] HÉTU, J.-F. (1991). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

- [14] HÉTU, J.-F. et PELLETIER, D. (1992). Fast, adaptive finite element scheme for viscous incompressible flows. *AIAA Journal*, 30, 2677–2682.
- [15] ILINCA, F., PELLETIER, D. et TURGEON, É. (1997). An adaptive finite element method for forced convection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25, 803–823.
- [16] KHOMAMI, B., TALWAR, K.K. et GANPULE, H.K. (1994). A comparative study of higher- and lower-order finite element techniques for computation of viscoelastic flows. *Journal of Rheology*, 38, 255–289.
- [17] LESAIN, P., RAVIART, P.A. (1974). On a finite element method for solving the neutron transport equation. Dans *Mathematical aspect of finite elements in partial differential equations*, C. de Boor, editeur, pages 89–123. Academic Press.
- [18] MARCHAL, J.M. et CROCHET, M.J. (1987). A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 26, 77–114.
- [19] PARASCHIVOIU, M. (1993). *Une méthode adaptative pour la résolution exacte des ondes de choc et des discontinuités de contact*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [20] PHAN THIEN, N. et TANNER R. I. (1977). A New Constitutive Equation Derived From Network Theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2, 353–365.

- [21] PIERRE, R., GUÉNETTE, R., FORTIN, A. (1998). en préparation.
- [22] RAMADANE, A., ESSELAOUI, D., NAJIB, K. et ZINE, A. (1998). Méthode efficace pour la résolution numérique d'écoulements de fluides non-newtoniens. Dans *Deuxième conférence internationale sur les mathématiques appliquées et les sciences de l'ingénieur*, Casablanca.
- [23] RAO, R.R. et FINLAYSON, B.A. (1991). Adaptive refinement of a viscoelastic flow problem with the explicit elliptic momentum equation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 38, 223–246.
- [24] SAAD, Y. et SCHULTZ, M.H. (1986). GMRES: A Generalised Minimal Residual algorithm for computing nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7, 856–869.
- [25] STROUBOULIS, T. et ODEN, J.T. (1990). A posteriori error estimation of finite element approximation in fluid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78, 201–242.
- [26] SZADY, M.J., SALAMON, T.R., LIU, A.W., BORNSIDE, D.E., ARMSTRONG, R.C. et BROWN, R.A. (1995). A new mixed finite element method for viscoelastic flows governed by differential constitutive equations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 59, 215–243.
- [27] TALWAR, K.K., GANPULE, H.K. et KHOMAMI, B. (1995). A note on selection of spaces in computation of viscoelastic flows using the hp-finite element method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 59, 49–72.

- [28] TRÉPANIÉ, J.-Y. et YANG, H. (1993). *ADX: algorithms for adaptive discretization based on triangular grids*. Rapport technique, École Polytechnique de Montréal, Montréal.
- [29] TRÉPANIÉ, J.Y., PATACHIVOIU, M., REGGIO, M. et CAMARERO, R. (1996). A conservative shock fitting method on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 126, 421–433.
- [30] VERFÜRTH, R. (1989). A posteriori error for the Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 55, 309–325.
- [31] VERFÜRTH, R. (1994). A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50, 67–83.
- [32] WANG, K.C. et CAREY, G.F. (1990). Adaptive grids for coupled viscous flow and transport. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 82, 365–383.
- [33] WARICHET, V. et LEGAT, V. (1996). Adaptive *hp*-finite element viscoelastic flow calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136, 93–110.
- [34] WARICHET, V. et LEGAT, V. (1997). Adaptive high-order prediction of the drag correction factor for the upper-convected Maxwell fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 73, 95–114.

- [35] ZAKI, A. (1993). *Simulation numérique des problèmes de convection sur des maillages adaptatifs non structurés du type h-p*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [36] ZIENKIEWICZ, O.C. et TAYLOR, R.L. (1989). *The finite element method. Basic formulation and linear problems*. McGraw Hill, Londre.
- [37] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 337–357.
- [38] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z. (1991). Adaptivity and mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, 783–810.
- [39] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1331–1364.
- [40] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1365–1382.
- [41] ZIENKIEWICZ, O.C., LIU, Y.C. et HUANG, G.C. (1988). Error estimator and adaptivity in flow formulation for forming problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25, 23–42.